Мићо М. Митровић

ЗБИРКА ЗАДАТАКА

ВЕЗАНИХ ЗА ТАКМИЧЕЊА
ИЗ

ФИЗИКЕ

(1990 - 1995)

1

РАЗРЕД

БЕОГРАД 1999.

ЗБИРКА ЗАДАТАКА ВЕЗАНИХ ЗА ТАКМИЧЕЊА
ИЗ ФИЗИКЕ (1990-1995) И РАЗРЕД
Друго издање

Аутор: др Мићо М. Митровић, виши научни сарадник
Физичког факултета Универзитета у Београду

Рецензент: др Сунчица Елезовић-Хахић, асистент
Физичког факултета Универзитета у Београду

Издавач: др Мићо М. Митровић, др Агостина Нета 76/23
11070 Нови Београд

Уредник: др Мићо М. Митровић

Лектор: Милојевић Ружа

Цртежи и техничка обрада:
Славко Кристовић
Драгица Митровић
Марко Митровић
Марија Митровић

Тираж: 700 примерака

CIP - Каталогизација у публикацији
Народне библиотеке Србије, Београд

372.853 (075.3) (079.1)

МИТРОВИЋ, Мићо М.
Збирка задатака везаних за такмичења из физике : (1990-1995) : 1 разред / Мићо М. Митровић ; - (цртежи Славко Кристовић ... и др.). - (2 изд.). - Београд : М. М. Митровић, 1999 (Нови Београд : Зламен). - 174 стр. : граф. прикази ; 24 цм

Тираж 700.

ISBN 86 - 901669 - 4 - 7
ID = 71603980

Штампа: "Зламен" – Нови Београд

П Р Е Д Г О В О Р

Збирка се састоји из два дела. У првом делу су дате:
- практичне опште препоруке које, по мом мишљењу, могу помоћи у решавању задатака,
- кратак приказ теорије грешака мерења,
- кратак преглед теорије, неопходне за решавање задатака, из области које обухвата Збирка,
- приказ неких математичких релација,

Преглед теорије грешака је дат зато што постоји тенденција да се у наредном периоду од ученика, на вишим нивоима такмичења, тражи решавање једноставнијих експерименталних проблема (мисаоних и реалних). То је неопходно због лоших резултата које наши представници показују при решавању експерименталних задатака на међународним такмичењима.

У оквиру прегледа теорије, у облику напомена, после највећег броја тема, дат је низ практичних савета за решавање задатака, који по мом мишљењу могу бити од користи.

Други део Збирке садржи задатке са решењима. Збирка садржи највећи број проблема који су у периоду од школске 1989/90. до школске 1994/95. године задавани на такмичењима из физике ученика средњих школа у Југославији, односно на општинским, регионалним (градским) и републичким такмичењима у Републици Србији, као и на савезним такмичењима.

Збирка садржи задатке врло различите тежине. Тежина задатка је првенствено одређена нивоом такмичења и бројем поена које је решавачу доносило исправно решење задатка, а који је наведен после текста сваког задатка. На сваком нивоу такмичења постављано је по пет задатака, са укупним бројем поена 100, тако да задаци просечне тежине, за одговарајући ниво такмичења, носе 20 поена. Задаци су поредани по годинама на које се односе и нивоима такмичења, од најлакшег, општинског, до најтежег, савезног.

Задатке на овим такмичењима (у даљем тексту оригинални задаци) у наведеном периоду је припремало више од 30 особа, са неусаглашеним приступом формулацији и решавању задатака. Многи задаци у оригиналним верзијама нису најбоље, а понекада су и сасвим лоше формулисани. Оригинална решења, тј. решења одговарајућих такмичарских комисија, понекад нису била најбоља, а дешавало се да су и сасвим погрешна. На многе овакве недостатке су указивали ученици и њихови наставници. За ове пропусте се, поред аутора и рецензената задатака, осећам и сам одговорним као председник Комисије за такмичења Друштва физичара Србије у већем делу наведеног периода (1990-1992) и 1995. године.

Због свега наведеног, највећи број задатака је мање или више преформулисан. Задаци су формулисани тако како би их ја формулисао у тренутку писања Збирке. При томе сам се трудио да се задржи основна идеја оригиналног задатка, тј. да задатак разматра исте физичке процесе као његова оригинална верзија.

Код задатака код којих је постојао несклад између поставке и решења у оригиналној верзији, настојао сам да више мењам тест задатка и прилагодим га оригиналном решењу, да би се очувала претпостављена тежина задатка изражена кроз бодове. Кроз напомене после оваквих задатака најчешће је дато и комплетно решење оригиналне поставке задатка. Поред наведеног, кроз напомене после многих задатака настојао сам да истакнем неке поуке које се могу извући из задатка, укажем на могуће варијанте сличних задатака, решим задатак на више значајно различитих начина, истакнем значајнију измену у задатку због приближавања реалним (остваривим) условима и укажем на уочене грешке у оригиналним поставкама и решењима задатака.

Задатке са појединих такмичења у овом периоду нисам успео сакупити. Неке задатке, који су били на такмичењима, изоставио сам јер по мом мишљењу не заслужују да буду на такмичењима из различитих разлога. Неке од њих није било могуће прерадом

довести на, по мом мишљењу, одговарајући ниво уз задржавање основних идеја садржаних у оригиналној верзији.

Пошто су до школске 1991/92. године на савезном такмичењу постојале такмичарске групе по областима, а не по разредима, у Збирци су дати само задаци из такмичарске групе "Механика и термодинамика", који одговарају градиву првог разреда гимназија.

У прилогу су дате бројне вредности најзначјнијих физичких константи из области физике које Збирка обрађује.

Збирка је првенствено намењена ученицима који се такмиче у знању из физике и наставном особљу које припрема ученике за такмичења, али и осталима који желе добро да савладају средњешколско градиво из физике. Пошто су такмичарски задаци натпросечне тежине, Збирка може бити од користи и за припрему пријемних испита на факултетима, као и за припреме писмених испита из општих курсева физике на различитим факултетима.

Овом приликом захваљујем свим ауторима и рецензентима задатака за такмичења, од којих су многи послужили као основ за ову Збирку. Аутори многих задатака нису познати. Са простора СР Југославије у овом периоду задатке су састављали и рецензирали, поред мене, и: доц. Јаблан Дојчиловић, Иван Виденовић, др Сунчица Елезовић-Хахић, мр Весна Прокић, др Срђан Буквић, Владимир Милосављевић, Владимир Миљковић, Драган Стојковић, доц. Зоран Радовић, проф. Александар Срећковић, Воја Радовановић, Драган Попарић, проф. Томислав Петровић, проф. Милан Дамњановић, мр Живојин Николић, мр Милош Вићић, Драган Рецић и проф. Драган Крпић, сви са Физичког факултета у Београду, мр Предраг Мирановић и мр Борко Вујичић, са Природноматематичког факултета у Подгорици, др Мира Поповић-Божић, Миомир Вукмировић, Звонимир Бандић и Душан Арсеновић, из Института за физику у Београду, др Дражен Воркапић, из Института "Винча", Оливера Шашић (рођена Игњатовић), са Саобраћајног факултета у Београду. Сви су они, поред мене, били чланови Републичке или Савезне комисије за такмичења у периоду између 1990. и 1995. године, периоду такмичења на који се ова збирка односи. За општинско такмичење шк. 1990/91. године задатке су припремали и Љубомир Јовановић, Драгослав Франк и Љиљана Петровић, наставници средњих школа у Београду.

Молим читаоце да примедбе и сугестије шаљу на адресу: Мићо Митровић, Билевар уметности 76/23, 11070 Нови Београд, Унапред захваљујем.

У Београду,
јануара, 1996. године

Мићо М. Митровић

У П У Т С Т В О З А
К О Р И Ч Ћ Е Њ Е З Б И Р К Е

- Једначине у уводном делу збирке означене су словом "У" испред броја једначине.

- У задацима су нумерисане само једначине на које се позива у другим деловима Збирке. Нумерација ових једначина је засебна за сваки задатак.

- Слике у уводном делу збирке су нумерисане. Слике у задацима нису нумерисане, а позив на њих се врши кроз одговарајући текст који се односи на сваки задатак посебно ("слика у здатку", слика у решењу", "прва слика у решењу" и сл.).

- Бројне вредности највећег броја физичких константи нису дате у тексту задатка. Њихове вредности су дате на крају Збирке, у прилогу "Неке физичке константе".

- У задацима у којима није другачије наглашено, узето је $g = 9.81\mathrm{m/s^2}$.

- Нумерација задатака је извршена по шеми: **X.Y.Z**, где су: **X** - редни број задатка (за сваку годину посебно), **Y** - година такмичења (скраћено) и **Z** - ниво такмичења (**О** - општинско, **РГ** - регионално, **РП** - републичко и **С** - савезно).

НЕКОЛИКО ПРЕПОРУКА ЗА РЕШАВАЊЕ ЗАДАТАКА

1) Када се у једном поступку решава више задатака, прочитати их прво све пажљиво. Прво решавати задатке који изгледају лакши при првом читању.

2) У задацима из физике се разматрају физички процеси, па је за њихово правилно решење неопходно познавање физичких процеса на које се задатак односи, без обзира на то што се решавање своди на низ математичких операција, или извођење експеримената. Због тога задатак треба пажљиво читати све док не буду потпуно јасни сви физички процеси и све појаве који се разматрају у задатку.

3) Пре почетка решавања задатка јасно и издвојено, на почетку простора за решавање, записати дате и тражене величине. При томе треба:

- Поред датих, записати и вредности свих осталих потребних физичких величина, било да решавач треба да их зна напамет (например, убрзање Земљине теже $g = 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$), било да треба да их узме из одговарајућих извора (например приложених табела).

- Посебно пажљиво, из услова задатка, одредити и записати оне величине које нису дате ни бројно ни у општим ознакама, али се њихове вредности могу одредити, или оценити, из текста задатка.

Пример 1: Ако се посматра кретање тела до заустављања, обавезно записати да је коначна брзина тела $\vec{v} = 0$.

Пример 2: Ако је у тексту задатка речено да је нека величина x занемарљива, обавезно записати $x \approx 0$ или $x = 0$.

4) Пре израчунавања бројних вредности физичких величина потребно је:

- Све величине у поменутом запису изразити у одговарајућим јединицама СИ система. Од овог се може одступити једино ако се из добијене опште формуле види да се јединице неких величина, после уврштавања у формулу, скраћују. Наравно, тада одговарајуће величине могу бити изражене у произвољним, али истим јединицама.

- Префиксе јединица изразити помоћу одговарајућих експонената. При томе се држати правила да се експонент бира тако да децимални зарез долази иза

прве цифре различите од нуле, односно, све бројне вредности морају бити записане у облику $a \cdot 10^n$, где је $1 \le a \le 10$, а n цео број. Ипак, бројна вредност се не пише помоћу експонента, ако је $n = \pm 1$, а не мора се писати у облику експонента ако је $n = \pm 2$.

Пример 1. Правилно је написати: $t = 33\text{ns} = 3.3 \cdot 10^{-8}\text{s}$,

а неправилно је написати: $t = 33\text{ns} = 33 \cdot 10^{-9}\text{s}$.

Пример 1. Правилно је написати: $t = 0.2\text{MJ} = 2 \cdot 10^5\text{J}$,

а неправилно је написати: $t = 0.2\text{MJ} = 0.2 \cdot 10^6\text{J}$.

5) Када год је то могуће, скицирати један или више цртежа који илуструју суштину задатка. На свим цртежима, у поменутом под 3) запису и у формулама, разматране физичке величине означити једнозначно, да не би дошло до збрке у ознакама.

6) Одредити којим се физичким законима потчињавају разматрани процеси и којим се математичким формулама изражавају ови процеси. Ако постоји више таквих формула, одабрати оне које повезују познате и тражене физичке величине на најједноставнији начин.

7) Размислити да ли нека упрошћења олакшавају решавање задатка. По правилу, сваки задатак би требало да има наглашена сва упрошћења која се смеју користити, међутим, од тога се понекада одступа. Например, у динамици се најчешће, ако се не нагласи супротно, подразумевају константне силе, неистегљиве нити које спајају тела, занемарују масе нити и котурова, неке силе трења и сл.

Пример: Ако у задатку није дат неки коефицијент трења, или наглашено постојање трења, није потребно уопштавати решење тако што би се разматрао проблем када одговарајуће трење постоји. Ипак, треба бити пажљив. Некада је основни проблем задатка осетити постојање ненаглашене силе трења. Таква ситуација се препознаје бесмисленошћу датих података у задатку без укључивања силе трења у разматрани проблем.

Напомена 1: Ову ситуацију треба разликовати од случаја када је ре-шавач сигуран да се решење задатка не може добити без познавања неке величине која није дата у задатку, нити се подразумева њено познавање од стране решавача, као ни њено налажење у прилозима. У том случају резултат треба изразити у функцији те величине. У овом случају се најчешће ради о лоше формулисаном задатку.

Напомена 2: Ако решавач не зна бројну вредност неке величине, коју би требало да познаје, резултат треба изразити као функцију те величине.

8) По правилу се задаци решавају у општем облику, односно, изводе се формуле у којима су експлицитно изражене тражене преко познатих величина. На самом крају се у ове формуле уврштавају вредности познатих величина и израчунавају тражене величине. Оваквим поступком се избегава увећавање рачунских грешака због заокруживања вредности успутно одре-ђених величина. Од овог правила је оправдано одступити у случајевима:

- Ако је формула за успутно одређену величину сувише компликована, тако да њено израчунавање знатно поједностављује запис тражене физичке величине.

- Ако је решење задатка много једноставније када се у опште формуле уврсте бројне вредности познатих физичких величина. То се најчешће дешава када треба решити систем више једначина. У том случају се у формуле уврштавају бројне вредности величина у јединицама СИ система. Због једноставности, уврштавају се без једниница, иако то није сасвим коректно. Резултат, наравно, мора бити у одговарајућој јединици истог система.

9) Када се добије опште решење, препоручљиво је проверити његову разумност. То је најлакше урадити на два начина:

- Димензионалном провером решења. Због тога је, при израчунавању бројних вредности тражених величина, неопходно у општи израз уврстити бројне вредности са мерним јединицама. После израчунавања бројне вредности, математичким операцијама средити израз за јединицу тражене величине и проверити да ли он одговара познатој јединици тражене величине. Ако су добијене формуле у форми збира или разлике више чланова, добро је проверити једнакост њихових димензија.

- Провером ваљаности решења на упрошћеним проблемима.

Пример: Ако се у решење задатка из динамике, у коме се узима у обзир постојање трења, уврсти нулта вредност силе трења, мора се добити исти резултат као када се реши сличан проблем са занемаривим трењем.

10) Ако су у задатку дате бројне вредности познатих физичких величина, резултат мора да садржи бројне вредности тражених величина. Оне се пишу са свим значајним цифрама, у складу са правилима описаним у поглављима ″Грешке мерења физичких величина″ и ″Правила за рад са приближним бројевима″.

11) Ако су у задатку бројне вредности физичких величина дате са припадајућим грешкама, резултат мора да садржи и процењене грешке тражених физичких величина. При изражавању бројних вредности и грешака треба се

придржавати правила која су изложена у поглављу "Грешке мерења физичких величина".

12) Префикси јединица физичких величина бирају се тако да се бројна вредност налази у интервалу од 0.1 до 1000.

Пример: Бројну вредност $2.5\cdot10^{-5}\mathrm{m}$ треба написати помоћу префикса микро, а не помоћу префикса мили или нано, јер је $2.5\cdot10^{-5}\mathrm{m} = 25\mu\mathrm{m}$, а 25 је у наведеном интервалу.

13) Након израчунавања бројних вредности тражених физичких величина, запитајте се да ли ове вредности имају смисла, можда ћете открити грешку. Брзина тела не може бити већа од брзине светлости у вакууму, атом не може имати масу реда величине микрограма, човек не може бацити камен на висину од 1000 м, и сл.

ПРАВИЛА ЗА РАД СА ПРИБЛИЖНИМ БРОЈЕВИМА

Ако бројне вредности физичких величина нису дате са грешкама, тада морају бити приказане са одговарајућим бројем цифара. Бројна вредност не треба да садржи ни премало ни превише цифара. Једнако је лош недовољан и излишан број цифара.

Значајне цифре бројних вредности физичких величина

У бројној вредности треба приказати све значајне цифре (све сигурне и прва несигурна). Другим речима, последња цифра у бројној вредности треба да има исти ред величине као процењена грешка бројне вредности.

Значајне цифре у бројној вредности су све цифре различите од нуле. Нуле могу бити значајне цифре у два случаја:

а) Ако се налазе између цифара различитих од нуле, као код бројева 2.304, 30.2, $1.405\cdot10^{-3}$ и сл.

б) Ако се налазе на крају датог броја, да би означиле ред величине грешке, као код бројева 12.200, 10.0, $1.450\cdot10^{-3}$ и сл. Код броја 0.02340 последња нула јесте значајна цифра, али прве две нуле нису, последица су само непогодног математичког записа, и могу се избећи писањем наведеног броја у облику $2.340\cdot10^{-2}$.

Пример 1: Ако апсолутна грешка мерења напона има ред величине стотих делова волта (0.01-0.09V), бројне вредности напона треба писати у облику:

$$10.00\ \text{V} \qquad 0.34\ \text{V} \qquad 3.20000\cdot10^{3}\text{V}\,.$$

Пример 1: Ако апсолутна грешка мерења времена има ред величине десетица (10-90s), бројне вредности времена треба писати у облику:

$$40\text{s} \qquad 120\text{s} \qquad 3.520\cdot10^{3}\text{s}\,.$$

При писању израчунатих бројних вредности физичких величина, у задацима у којима нису наведене грешке познатих величина, треба се придржавати правила која омогућавају процену броја значајних цифара израчунатих величина.

Код међурезултата израчунавања треба увек задржати једну цифру више него што захтевају наведена правила, да би се избегло увећавање грешке због вишеструког заокруживања.

Правила за процену броја значајних цифара

Сабирање и одузимање. У збиру и разлици треба задржати само цифре до реда величине који имају цифре свих сабирака.

Примери: $12.432 + 2.3467 + 3.23 + 12.123 = 30.1317 \approx 30.13$

$135 + 12.8 - 55.15 + 76.2 - 195.545 = -26.695 \approx -27$

$2.10 \cdot 10^4 - 1295.2 + 3.72 \cdot 10^4 = 2{,}1 \cdot 10^3 - 1295.2 + 37200 = 56904.8 \approx 57000 = 5.70 \cdot 10^4$

У првом примеру најмањи ред величине цифара, који се појављује у свим сабирцима је ред величине стотих делова (има га сабирак 3.23) па се и резултат заокружује на стоте делове.

У другом примеру најмањи ред величине цифара, који се појављује у свим сабирцима је ред величине јединица (има га сабирак 135) па се и резултат заокружује на јединице.

У трећем примеру најмањи ред величине цифара, који се појављује у свим сабирцима је ред величине хиљада (има га први сабирак јер нема нула иза цифре 1) па се и резултат заокружује на хиљаде.

Множење и дељење. У производу и количнику чиниоце треба заокружити тако да садрже исти број значајних цифара као чиниоц са најмањим бројем таквих цифара. Резултат се пише са истим бројем цифара.

Примери:

$$\frac{3.345 \cdot 2.34231 \cdot 12.341}{12.4 \cdot 3.401 \cdot 3.213} \approx \frac{3.34 \cdot 2.34 \cdot 12.3}{12.4 \cdot 3.40 \cdot 3.21} = 0.7103 \approx 0.710$$

У овом примеру најмање значајних цифара (3) садржи чиниоц 12.4, па све остале чиниоце треба заокружити на три значајне цифре, као и коначан резултат.

Ако се горње израчунавање врши преко међурезултата (броиоца и имениоца), рачун треба да тече овако:

$$\frac{3.345 \cdot 2.34531 \cdot 12.341}{12.4 \cdot 3.401 \cdot 3.213} \approx \frac{3.345 \cdot 2.345 \cdot 12.34}{12.4 \cdot 3.40 \cdot 3.21} \approx \frac{96.795}{135.3} \approx 0.715\,.$$

Математичке функције. При степеновању, кореновању, логаритмовању, израчунавању тригонометријских и других стандардних функција у резултату треба задржати исти број значајних цифара колико садржи аргумент функције.

Примери: $5.21^2 \approx 27.1$ $\quad 2.3^5 \approx 64$ $\quad tg30.0° = 0.577$

$\sqrt{2.35} \approx 1.53$ $\quad \sqrt[4]{156.2} \approx 3.535$ $\quad \ln 62 = 4.1$

Наравно, подразумева се да 62 није природан број, него бројна вредност физичке величине, позната са грешком која је реда величине јединица.

Пример сложеног израза:

$$\frac{(1.2+19.071)\sqrt{3.8}}{5.1\cdot 3.009\cdot 10^4} \approx \frac{20.3\cdot 1.95}{15.3\cdot 10^4} \approx \frac{39.58}{15.3\cdot 10^4} \approx 2.59\cdot 10^{-4} \approx 2.6\cdot 10^{-4}.$$

Последње заокруживање је потребно због тога што је у међурезултатима задржавана једна цифра више.

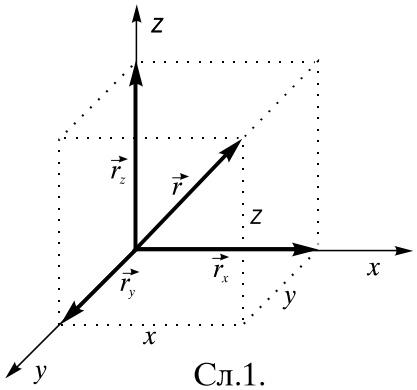
ФИЗИЧКЕ ОСНОВЕ МЕХАНИКЕ

КИНЕМАТИКА

Положај материјалне тачке

Положај материјалне тачке у простору је одређен:

а) *Радијус вектором* $\vec{r}$ - вектором повученим из координатног почетка, везаног за референтно тело, до посматране материјалне тачке (сл. 1).



Сл.1.

б) *Координатама материјалне тачке* x, y и z, које су једнаке пројекцијама радијус вектора на одговарајуће координатне осе, односно:

$$x = r_x\,,$$

$$y = r_y\,, \qquad \text{(У1)}$$

$$z = r_z\,.$$

При томе је:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad \text{(У2)}$$

Померање материјалне тачке у простору описује се:

а) *Померајем* $\Delta\vec{r}$ - разликом радијус вектора крајњег (2) и почетног (1) положаја материјалне тачке (сл. 2):

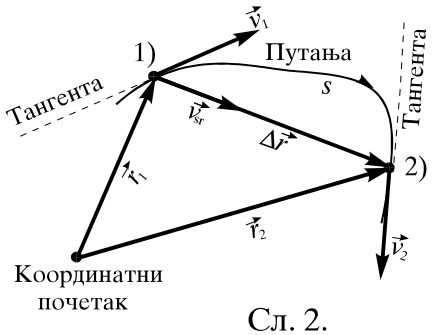
$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1\,. \qquad \text{(У3)}$$

б) *Пређеним путем* s - дужином дела путање који тело пређе у посматраном временском интервалу.

Кретање материјалне тачке је одређено:

а) *Законом кретања* - односно законом промене радијус вектора са временом, који се може представити једном векторском једначином:

$$\vec{r} = \vec{r}(t), \qquad \text{(У4)}$$



Сл. 2.

или три скаларне једначине:

$$x = x(t),$$

$$y = y(t), \qquad \text{(У5)}$$

$$z = z(t).$$

б) *Законом пута* - зависношћу пређеног пута од времена, односно једначином:

$$s = s(t), \qquad \text{(У6)}$$

при чему мора бити познат облик путање и тачка на њој од које се мери пређени пут.

Увек је $s \geq |\Delta\vec{r}|$. Знак једнакости важи за праволинијско кретање стално у истом смеру.

<u>Брзина материјалне тачке</u>

Средња брзина материјалне тачке у временском интервалу $\Delta t = t_2 - t_1$ износи:

$$\vec{v}_{\text{sr}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_1 - t_2}, \quad \text{односно} \quad \vec{v}_{\text{sr}} = \frac{\Delta\vec{r}_1 + \Delta\vec{r}_2 + \Delta\vec{r}_3 + \ldots + \Delta\vec{r}_n}{\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3 + \ldots + \Delta t_n}, \qquad \text{(У7)}$$

где су $\Delta\vec{r}_1, \Delta\vec{r}_2, \Delta\vec{r}_3, \ldots, \Delta\vec{r}_n$ помераји материјалне тачке у временским интервалима $\Delta t_1, \Delta t_2, \Delta t_3, \ldots, \Delta t_n$.

Средња брзина прелажења пута материјалне тачке у временском интервалу $\Delta t = t_2 - t_1$ износи:

$$v'_{\text{sr}} = \frac{s}{\Delta t}, \quad \text{односно} \qquad v'_{\text{sr}} = \frac{s_1 + s_2 + s_3 + \ldots + s_n}{\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3 + \ldots + \Delta t_n}, \qquad \text{(У8)}$$

где су $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n$ пређени путеви материјалне тачке у временским интервалима $\Delta t_1, \Delta t_2, \Delta t_3, \ldots, \Delta t_n$.

Увек је $v'_{sr} \geq |\vec{v}_{sr}|$. Знак једнакости важи за праволинијско кретање стално у истом смеру.

Тренутна брзина материјалне тачке, или кратко - брзина $\vec{v}$, једнака је средњој брзини материјалне тачке у бесконачно малом временском интервалу. Правац и смер средње брзине су исти као правац и смер помераја. Правац тренутне брзине је једнак правцу тангенте на путању, а смер је у смеру кретања (сл. 2). Тренутне брзине, дефинисане помоћу помераја и пута су једнаке.

<u>Убрзање материјалне тачке</u>

Средње убрзање материјалне тачке у временском интервалу $\Delta t = t_2 - t_1$ износи:

$$\vec{a}_{sr} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_1 - t_2}, \qquad (У9)$$

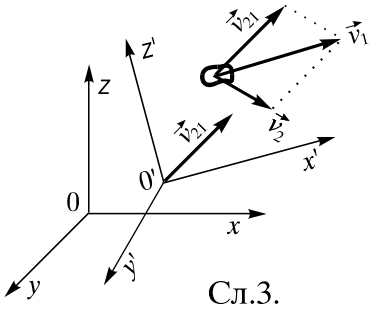
где је $\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ промена брзине материјалне тачке у посматраном временском интервалу.

Тренутно убрзање материјалне тачке, или кратко - *убрзање* $\vec{a}$, једнако је средњем убрзању материјалне тачке у бесконачно малом временском интервалу.

<u>Релативност кретања</u>

Нека се други референтни систем (O'*x*'*y*'*z*') креће у односу на први (O*xyz*) транслаторно брзином $\vec{v}_{21}$ (преносна брзина). Ако је брзина тела у првом референтном систему $\vec{v}_1$ (апсолутна брзина), а у другом референтном систему $\vec{v}_2$ (релативна брзина), тада је (види сл. 3):

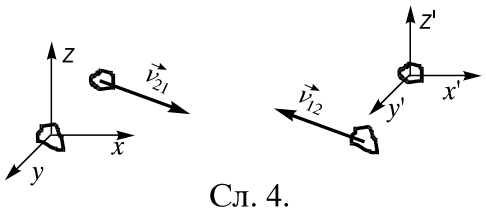
$$\vec{v}_1 = \vec{v}_2 + \vec{v}_{21}. \qquad (У10)$$



Сл.3.

Брзина тела два у односу на тело један $\vec{v}_{21}$ и брзина тела један у односу на тело два $\vec{v}_{12}$ (види сл. 4) повезане су релацијом:

$$\vec{v}_{12} = -\vec{v}_{21}. \qquad \text{(У11)}$$



Сл. 4.

Нека се други референтни систем креће у односу на први транслаторно убрзањем $\vec{a}_{21}$ (преносно убрзање). За илустрацију би могла послужити слика аналогна сл. 4, у којој су брзине замењене убрзањима. Ако је убрзање тела у првом референтном систему $\vec{a}_1$ (апсолутно убрзање), а у другом референтном систему $\vec{a}_2$ (релативно убрзање), тада је:

$$\vec{a}_1 = \vec{a}_2 + \vec{a}_{21}. \qquad \text{(У12)}$$

Треба нагласити да једначине (У10) и (У12) важе за транслаторна кретања другог референтног система у односу на први. У случају произвољног кретања, одговарајуће релације су сложеније.

<u>Кинематика равномерно праволинијског кретања</u>

При равномерно праволинијском кретању је $\vec{a} = 0$ и $\vec{v} = \text{const}$. Векторска једначина кретања има облик:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}t, \qquad \text{(У13)}$$

а скаларне једначине облик:

$$x = x_0 + v_x t, \qquad y = y_0 + v_y t, \qquad z = z_0 + v_z t, \qquad \text{(У14)}$$

где су v_x, v_y, v_z одговарајуће компоненте брзине. Закон пута овог кретања гласи:

$$s = s_0 + vt. \qquad \text{(У15)}$$

Величине означене индексом нула односе се на почетни тренутак $m = 0$.

Најједноставнији облик горње једначине имају ако је правац x - осе у правцу путање, смер у смеру кретања, а почетни положај материјалне тачке одговара координатном почетку и почетној тачки пређеног пута. Тада се кретање може описати једначинама:

$$x = vt \tag{У16}$$

$$s = vt\ . \tag{У17}$$

Напомена: Закони пута, односно једначине (У15) и (У17), важе за сва равномерна кретања материјалне тачке, без обзира на облик путање, односно, и за криволинијска кретања.

<u>Кинематика равномерно убрзаног праволинијског кретања</u>

При равномерно убрзаном праволинијском кретању је $\vec{a} = \text{const}$, а брзина материјалне тачке се линеарно мења са временом, односно:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t\ , \tag{У18}$$

као и њене компоненте

$$v_x = v_{0x} + a_x t\ , \qquad v_y = v_{0y} + a_y t\ , \qquad v_z = v_{0z} + a_z t\ . \tag{У19}$$

При томе је:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}\ . \tag{У20}$$

Векторска једначина овог кретања има облик:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2\ , \tag{У21}$$

а скаларне једначине облик:

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2\ , \qquad y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2\ ,$$

$$z = z_0 + v_{0z}t + \frac{1}{2}a_z t^2\ , \tag{У22}$$

где су a_x, a_y, a_z одговарајуће компоненте убрзања, а v_{0x}, v_{0y}, v_{0z} одговарајуће компоненте почетне брзине.

Закон пута овог кретања, у случају када почетна брзина и убрзање имају исти смер, гласи:

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2\ , \tag{У23}$$

Ако је правац x - осе у правцу путање, смер у смеру кретања, почетни положај материјалне тачке одговара координатном почетку и почетној тачки пређеног пута и ако су убрзање и почетна брзина у смеру x - осе, кретање се може описати једначинама:

$$v = v_0 + at\,, \tag{У24}$$

$$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2\,, \tag{У25}$$

$$s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2\,, \tag{У26}$$

$$v^2 = v_0^2 + 2as\,. \tag{У27}$$

Напомена 1: Слободан пад је слободно кретање тела, без веза, (види параграф "Везе") кроз вакуум у пољу Земљине теже, са или без почетне брзине. Кретање се може описати једначинама истог типа као што су једначине (У24-27), само што је убрзање једнако убрзању Земљине теже - g (види једначину (У85)).

Напомена 2: У свим једначинама компоненте брзине и убрзања могу имати позитивне или негативне вредности, што зависи од смера одговарајућих вектора. На пример, ако је почетна брзина у смеру x - осе, а убрзање супротног смера од почетне брзине, кретање је равномерно успорено, па се једначине (У24-27) могу написати у облику:

$$v = v_0 + at\,, \tag{У28}$$

$$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2\,, \tag{У29}$$

$$s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2\,, \tag{У30}$$

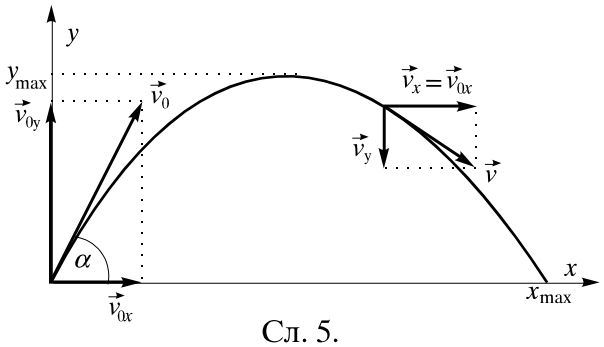
$$v^2 = v_0^2 + 2as\,. \tag{У31}$$

Међутим, ако се користе једначине (У28-31), за убрзање морају да се користе апсолутне вредности убрзања, односно $a = |\vec{a}| > 0$.

Напомена 3: Само за равномерно убрзано и равномерно успорено кретање је средња брзина у неком временском интервалу увек једнака аритметичкој средини брзина на почетку (v_1) и на крају (v_2) тог интервала, односно:

$$v_{sr} = \frac{v_1 + v_2}{2}\,. \tag{У32}$$

У осталим случајевима, са знањем математике које имају ученици првог разреда гимназија, средњу брзину треба рачунати према једначинама (У6,У7).



Сл. 5.

Коси хитац

Једначине кретања косог хица, избаченог почетном брзином v_0, под углом α у односу на хоризонталу, у координатном систему као на сл. 5, имају облик:

$$v_x = v_{0x} = \text{const}\,, \tag{У33}$$

$$v_y = v_{0y} - gt\,, \tag{У34}$$

$$x = v_{0x}t\,, \tag{У35}$$

$$y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2\,. \tag{У36}$$

Једначина путање хица има облик:

$$y = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}x - \frac{g}{2v_{0x}^2}x^2\,. \tag{У37}$$

Максимална висина коју хитац достигне и време за које стигне у највишу тачку износе:

$$y_{max} = \frac{v_{0y}^2}{2g}\,, \qquad t_1 = \frac{v_{0y}}{g}\,. \tag{У38}$$

Домет косог хица и време за које хитац прелети целу путању износе:

$$x_{max} = \frac{2v_{0x}v_{0y}}{g}\,, \qquad t_2 = \frac{2v_{0y}}{g}\,. \tag{У39}$$

Хоризонтални хитац

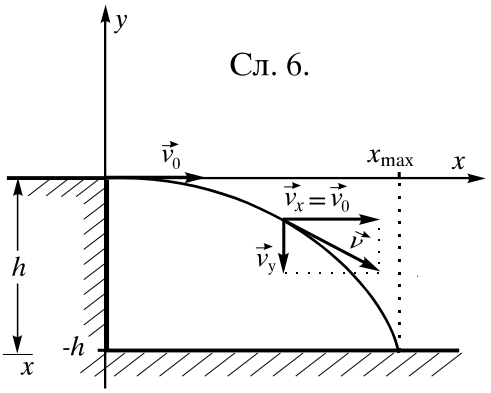
Једначине кретања хоризонталног хица, избаченог почетном брзином v_0, у координатном систему као на слици 6, гласе:

$$v_x = v_0 = \text{const} \qquad \text{(У40)}$$

$$v_y = -gt\,, \qquad \text{(У41)}$$

$$x = v_0 t\,, \qquad \text{(У42)}$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2\,, \qquad \text{(У43)}$$



Сл. 6.

а једначина путање облик:

$$y = -\frac{g}{2v_0^2}x^2\,. \qquad \text{(У44)}$$

Домет хоризонталног хица баченог са висине x и време после кога хитац падне на хоризонталну подлогу, износе:

$$x_{\max} = v_0\sqrt{\frac{2h}{g}}\,, \qquad t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} \qquad \text{(У45)}$$

Кретање чврстог тела

Транслаторно кретање је кретање при коме свака права причвршћена за тело остаје паралелна сама себи у току кретања. При оваквом кретању све тачке тела описују путање истог облика, прелазе исте путеве и имају исте брзине и убрзања у сваком тренутку. Због тога је за описивање транслаторног кретања чврстог тела довољно описати кретање једне његове тачке, за шта се могу користити све раније поменуте једначине којима се описују кретања материјалне тачке.

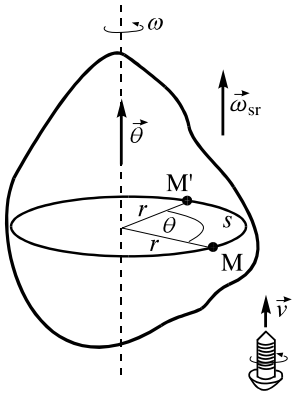
Ротационо кретање је кретање при коме све тачке тела описују кружнице које леже у паралелним равнима и чији се центри налазе на једној непокретној оси, такозваној оси ротације.

Кинематика ротационог кретања

При ротационом кретању све тачке тела ротирају за исти угао у одређеном временском интервалу. Угаони померај, односно *угао ротације* $\vec{\theta}$ (у радијанима) јесте вектор чији је интензитет:

$$\theta = \frac{s}{r}, \qquad \text{(У46)}$$

где је *c* пут који пређе било која тачка тела у посматраном временском интервалу, а *p* полупречник кружнице по којој кружи посматрана тачка. Правац овог вектора је исти као правац осе ротације, а смер му је у смеру померања десног завртња, који ротира у истом смеру као тело (сл. 7).



Сл. 7.

Угаона брзина

Средња угаона брзина тела у временском интервалу $\Delta t = t_2 - t_1$ износи:

$$\vec{\omega}_{sr} = \frac{\vec{\theta}}{\Delta t}. \qquad \text{(У47)}$$

Тренутна угаона брзина, или кратко - *угаона брзина тела* $\vec{\omega}$, једнака је средњој угаоној брзини у бесконачно малом временском интервалу. Правац и смер угаоне брзине једнаки су правцу и смеру угла ротације (сл. 7).

Угаона брзина се може изразити преко *периода T* и *фреквенције* ν ротационог кретања:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu. \qquad \text{(У48)}$$

Линијска (периферна, тангенцијална) брзина тачке чврстог тела која се налази на удаљености *p* од осе ротације износи:

$$v = r\,\omega. \qquad \text{(У49)}$$

Угаоно убрзање

Средње угаоно убрзање тела у временском интервалу $\Delta t = t_2 - t_1$ износи:

$$\vec{\alpha}_{sr} = \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1}{t_1 - t_2}, \qquad \text{(У50)}$$

где је $\Delta\vec{\omega} = \vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1$ промена угаоне брзине тела у посматраном временском интервалу.

Тренутно угаоно убрзање, или кратко - *угаоно убрзање* $\vec{\alpha}$, једнако је средњем угаоном убрзању у бесконачно малом временском интервалу. Правац и смер угаоног убрзања једнаки су правцу и смеру вектора промене угаоне брзине.

Кинематика равномерно ротационог кретања

При равномерном ротационом кретању је $\vec{\alpha} = 0$ и $\vec{\omega} = \text{const}$, а једначина кретања тела има облик:

$$\theta = \omega t . \qquad \text{(У51)}$$

Кинематика равномерно убрзаног ротационог кретања

При равномерно убрзаном ротационом кретању је $\vec{\alpha} = \text{const}$. Везе између угла ротације, угаоне брзине и угаоног убрзања, дате су једначинама:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t , \qquad \text{(У52)}$$

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 , \qquad \text{(У53)}$$

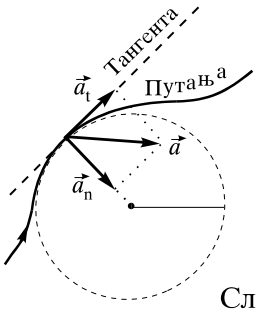
$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta . \qquad \text{(У54)}$$

Напомена: У овим једначинама је угаоно убрзање позитивно за равномерно убрзану, а негативно за равномерно успорену ротацију. Слично као код транслаторног кретања, за равномерно успорено кретање се могу користити једначине са знаком минус испред угаоног убрзања, али се тада уместо угаоног убрзања мора користити његова апсолутна вредност.

Криволинијско кретање материјалне тачке

Криволинијско кретање се може посматрати као кретање по кружници променљивог полупречника. Убрзање материјалне тачке се може разложити на две компоненте - тангенцијално и нормално убрзање (сл. 8).

$$\vec{a} = \vec{a}_\text{t} + \vec{a}_\text{n} , \qquad a = \sqrt{a_\text{t}^2 + a_\text{n}^2} . \qquad \text{(У55)}$$



Сл. 8.

Тангенцијално убрзање $a_\text{т}$ - је компонента убрзања у правцу тангенте на путању са смером у смеру кретања. Ово убрзање мења интензитет брзине тачке па је нула за сва равномерна кретања. Ако је полупречник кривине путање у некој тачки p, а угаоно убрзање α, тангенцијално убрзање тачке износи:

$$a_{\mathrm{t}} = r\alpha \,. \qquad \text{(У56)}$$

Нормално (центрипетално) убрзање a_{n} ($a_{\mathrm{ср}}$) - је компонента убрзања у правцу нормале на путању. Ово убрзање мења правац брзине тачке, па је нула за сва праволинијска кретања. Усмерено је ка центру тренутне кружнице по којој се тачка креће и износи:

$$a_{\mathrm{n}} = r\omega = \frac{v^2}{r} \,. \qquad \text{(У57)}$$

Ако је тангенцијална компонента убрзања нула, посматрано кретање је равномерно, а ако је нормална компонента убрзања нула, кретање је праволинијско.

Ако је тангенцијално убрзање константно, кретање је равномерно убрзано, а ако је нормално убрзање константно, при константном полупречнику путање, кретање је равномерно кружно.

Напомена: Закони пута, односно једначине (У23), (У26) и (У30), као и једначине (У27) и (У31) важе за сва равномерно убрзана кретања материјалне тачке, без обзира на облик путање, односно и за криволинијска кретања. Када се примене на криволинијска кретања, убрзања у овим једначинама имају смисао тангенцијалних убрзања.

Табела 3. Аналогија између транслаторног и ротационог кретања

Транслаторно кретање	Ротационо кретање	Прелазне формуле
Померај $\Delta\vec{r}$ (Пређени пут c)	Угао ротације $\vec{\theta}$	$s = r\theta$
Брзина $\vec{v}$	Угаона брзина $\vec{\omega}$	$v = r\omega$
Убрзање $\vec{a}$	Угаоно убрзање $\vec{\alpha}$	$a_{\mathrm{t}} = r\alpha^2$ $a_{\mathrm{n}} = r\omega$
Равномерно кретање $s = vt$	Равномерна ротација $\theta = \omega t$	
Равномерно убрзано кретање $v = v_0 + at$ $s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ $v^2 = v_0^2 + 2as$	Равномерно убрзана ротација $\omega = \omega_0 + \alpha t$ $\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$ $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta$	

Д И Н А М И К А

Центар масе

Радијус вектор центра масе система *н* материјалних тачака маса $m_1, m_2, \ldots, m_n$ и радијус вектора $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n$ (укупне масе *M*) износи:

$$\vec{r}_{\mathrm{c}} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots + m_n\vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i\,, \qquad \text{(У58)}$$

док су координате центра масе:

$$x_{\mathrm{c}} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i\,, \qquad y_{\mathrm{c}} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i\,, \qquad z_{\mathrm{c}} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i\,, \qquad \text{(У59)}$$

У случају хомогеног чврстог тела центар масе се поклапа са центром симетрије. Ако тело има осу симетрије, центар масе лежи на њој. У пољу силе Земљине теже центар масе се поклапа са тежиштем тела.

Напромена:

Приликом одрђивања положаја центра масе система материјалних тачака, координатни систем је добро поставити у једну од њих, а осе усмерити тако да пролазе кроз што већи број преосталих. На тај начина је најједноставније одредити центар масе и изражен је најједноставнијом релацијом.

Момент инерције

Момент инерције материјалне тачке масе *m*, на удаљености *r* од осе ротације, износи:

$$I = mr^2\,. \qquad \text{(У60)}$$

Исти израз важи и за моменте инерције танког прстена и танког цилиндра у односу на осу ротационе симетрије. У том случају су *m* и *r* њихове масе и полупречници.

Момент инерције је адитивна физичка величина, тј. момент инерције система тела једнак је збиру момената инерције појединих тела:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + \ldots + I_n . \qquad (У61)$$

Штајнерова теорема: Момент инерције тела у односу на било коју осу I и момент инерције I_0 тела у односу на осу паралелну наведеној, која пролази кроз тежиште тела, повезани су односом:

$$I = I_0 + md^2 , \qquad (У62)$$

где је d растојање између ових оса.

Табела 4. Моменти инерције неких хомогених тела масе *м*

Тело	У односу на осу	Момент инерције
Материјална тачка	на растојању p од тачке	mr^2
Цилиндар, танак прстен, полупр. r	ротационе симетрије	mr^2
Ваљак, диск полупречника r	ротационе симетрије	$I = \frac{1}{2}mr^2$
Кугла полупречника r	кроз центар кугле	$\frac{2}{5}mr^2$
Штап дужине l	кроз средину штапа, нормалну на штап	$\frac{1}{12}ml^2$
Штап дужине l	кроз крај штапа, нормалну на штап	$\frac{1}{3}ml^2$

Импулс

Импулс (количина кретања) материјалне тачке износи:

$$\vec{p} = m\vec{v} , \qquad (У63)$$

а импулс система n материјалних тачака, укупне масе M, износи:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = M\vec{v}_c , \qquad (У64)$$

где је $\vec{v}_c$ брзина центра масе система.

О графичком начину одређивања импулса види поглавље "Математичке релације", параграф "Графичка интеграција", тачка 5.

Напомена: Треба разликовати претходно дефинисани импулс тела од импулса силе, који је једнак промени импулса тела на које сила делује у одређеном временском интервалу. Ако се у истом проблему помињу оба појма, због избегавања забуне, за импулс тела се понекад користи термин - *количина кретања*.

Момент импулса

Момент импулса материјалне тачке импулса $\vec{p}$, у односу на изабрану тачку, износи:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v}\,, \qquad \text{(У65)}$$

где је $\vec{r}$ радијус вектор материјалне тачке у односу на изабрану тачку.

Момент импулса система n материјалних тачака износи:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = M\vec{v}_{\mathrm{c}}\,. \qquad \text{(У66)}$$

Момент импулса тела које ротира око фиксне осе износи:

$$\vec{L} = I\vec{\omega}\,, \qquad \text{(У67)}$$

где је I момент инерције тела у односу на поменуту осу.

О графичком начину одређивања момента импулса види поглавље "Математичке релације", параграф "Графичка интеграција", тачка 6.

Напомена: Момент импулса дефинисан једначинама (У65) и (У66), може да се односи и на транслаторно кретање. При кретању материјалне тачке по кружници, момент инерције је најбоље рачунати у односу на центар кружнице.

Момент силе

Момент силе $\vec{F}$ у односу на изабрану тачку износи:

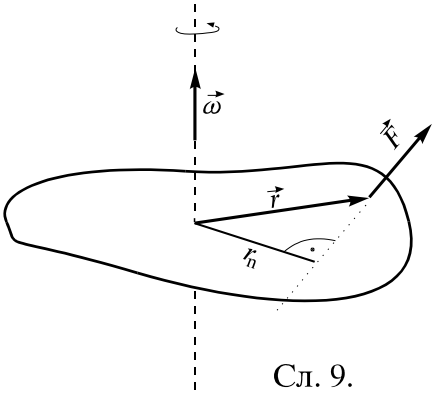
$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}\,, \qquad \text{(У68)}$$

где је $\vec{r}$ радијус вектор нападне тачке силе у односу на поменуту тачку. Интензитет момента силе износи:

$$M = r_{\mathrm{n}} F\,, \qquad \text{(У69)}$$

где је r_n нормална удаљеност правца силе од осе ротације - такозвани *крак силе* (види сл. 9).

Напомена : Потребно је нагласити да се оба момента (импулса и силе) дефинишу у односу на изабране тачке. Овако дефинисани моменти су вектори. Моменти у односу на осе представљају пројекције ових вектора на те осе - они су скалари. Ако вектори који одређују момент ($\vec{r}$ и $\vec{p}$, или $\vec{r}$ и $\vec{F}$) леже у равни нормалној на осу, момент има правац те осе, па је пројекција момента на осу једнака интензитету момента.



Сл. 9.

<u>Резултујућа сила и резултујући момент</u>

Ако на тело делују силе $\vec{F}_1, \vec{F}_1, \vec{F}_3, \ldots, \vec{F}_n$ са истом нападном тачком, њихово деловање се може заменити деловањем једне силе - резултанте:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_1 + \vec{F}_3 + \ldots + \vec{F}_n = \sum \vec{F}_i \,, \qquad \text{(У70)}$$

Ако ове силе делују на тело у различитим нападним тачкама, деловање им се може заменити дејством поменуте резултанте, која изазива транслаторно кретање и резултујућег момента силе, који изазива ротационо кретање:

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_1 + \vec{M}_3 + \ldots + \vec{M}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i \qquad \text{(У71)}$$

<u>Први Њутнов закон (Закон инерције)</u>

Ако је резултанта свих сила које делују на материјалну тачку нула, она се креће равномерно праволинијски или мирује, односно ако је

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_i = 0 \,, \quad \text{онда је} \quad \vec{v} = \text{const} \,. \qquad \text{(У72)}$$

<u>Други Њутнов закон</u>

Ако на тело делује више сила, чија је резултанта $\vec{F}$, Други Њутнов закон се може написати у облику:

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_i = m\vec{a} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}. \qquad (У73)$$

Када се односи на материјалну тачку масе *м*, $\vec{a}$ је њено убрзање, а када се односи на тело коначних димензија, $\vec{a}$ је убрзање његовог центра масе.

Ако је резултанта сила константна, Закон се може написати у облику:

$$\vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}, \qquad (У74)$$

где је $\Delta \vec{p}$ промена импулса у временском интервалу Δt. Ако резултанта није константна, последња једначина важи за бесконачно мале временске интервале.

Напомена 1: Други Њутнов закон у наведеним облицима важи само у инерцијалним системима, у којима важи и Први Њутнов закон. Да би Закон важио у формално истом облику, и у неинерцијалним системима, у збир сила се морају уврстити и инерцијалне силе, поред стварних (види параграфе "Инерцијалне силе" и "Центрифугална сила").

Напомена 2: При решавању проблема кретања више тела, Други Њутнов закон се може применити на кретање појединачних тела, група тела, или система као целине. Ако су за задатак важне силе којима међусобно делују тела (или су познате или се траже), Закон се примењује за појединачна тела на која те силе делују. Ако силе међусобног деловања нису значајне, Закон се примењује за цео систем. Тада маса у Закону представља масу целог система, а убрзање представља убрзање његовог центра масе. Силе међусобног деловања се тада поништавају, као унутрашње силе.

Напомена 3: Ако све силе леже у једној равни (просторни проблеми се избегавају на нивоу средњешколског градива), потребно је изабрати координатни систем тако да *x* и *y* - оса леже у тој равни. Пројектовањем једначине Другог Њутновог закона на осе, добија се:

$$\sum F_x = ma_x, \qquad \sum F_y = ma_y. \qquad (У75)$$

- У случају праволинијског кретања, згодно је једну осу (*x*) усмерити у правцу убрзања, а другу (*y*) нормално на убрзање, па је тада $a_x = a$ и $a_y = 0$, односно:

$$\sum F_x = ma, \qquad \sum F_y = 0. \qquad (У76)$$

- У случају криволинијског кретања, згодно је једну осу усмерити у смеру тангенцијалног убрзања, а другу у смеру нормалног (центрипеталног) убрзања.
- Некада је могуће и кретања у стварно различитим правцима посматрати као да се одвијају у истом. Такав је случај у проблемима са котурачама, које мењају правце нити које спајају тела. Међутим, и тада је могуће применити Други Њутнов закон у облику као да се кретање одвија по једном правцу. Пројекције сила и убрзања тада се врше на "правац кретања" и "правац нормалан на правац кретања" а не на x и y - осу.

Трећи Њутнов закон (Закон акције и реакције)

Силе међусобног деловања два тела имају исти интензитет и правац, али супротан смер, односно:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \qquad (У77)$$

Овај Закон не важи увек. Он строго важи при међусобном деловању тела која се додирују, као и удаљених тела која мирују.

Основни закон динамике ротације (Други Њутнов закон за ротацију)

Ако на тело делује више момената сила, чија је резултанта $\vec{M}$, важи:

$$\vec{M} = \sum \vec{M}_i = I\vec{\alpha}\,. \qquad (У78)$$

Ако је резултанта момената силе константна, Закон се може написати и у облику:

$$\vec{M} = \sum \vec{M}_i = \frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t}\,. \qquad (79)$$

где је $\Delta\vec{L}$ промена момента импулса у временском интервалу Δt . Ако резултанта није константна, једначина (У70) важи за бесконачно мале временске интервале (види параграф "Графичка интеграција" у поглављу "Неке математичке релације").

Напомена: Овај закон, као и Други Њутнов закон за транслацију, у наведеним облицима, важи само у инерцијалним референтним системима.

Статика

Услови равнотеже чврстог тела гласе:

$$\sum \vec{F}_i = 0\,, \qquad \sum \vec{M}_i = 0\,, \qquad (У80)$$

где су $\vec{M}_i$ моменти сила које делују на тело *у односу на било коју тачку*. Она се бира тако да једначине буду што једноставније. Равнотежа тела може бити: стабилна - ако се после малог извођења из равнотеже тело само враћа у равнотежни положај, лабилна - ако се после малог извођења из равнотеже тело самостално удаљава од њега, и индиферентна - ако тело изведено мало из равнотеже остаје у новом положају.

Напомена: У задацима се најчешће дају неке од сила из једначина (У80), док је одређивање других проблем који треба решити. Тада је обично највећи проблем одредити које све силе делују на тело, а у оквиру тога посебно правце тих сила. Посебно треба водити рачуна о одређивању свих сила реакција веза (сила трења и нормалних реакција веза - види параграф "Везе").

Инерцијални и неинерцијални референтни системи

Инерцијални референтни системи су системи у којима важи Закон инерције, или системи у којима тела мирују или се крећу равномерно праволинијски док на њих не делују друга тела неком силом. У овим системима делују само стварне силе - силе као последице међусобних деловања тела.

Следи преглед сила које се најчешће срећу у механици.

Везе

Тела која ограничавају кретања других тела зову се *везе*. Ако тело делује на везу силом $\vec{F}_{12}$, веза на тело делује силом $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$, која се зове *реакција везе*. Реакције везе могу бити тангенцијалне и нормалне (види пример у параграфу "Тежина тела", поглавља "Гравитација").

Тангенцијалне реакције везе

Тангенцијалне реакције везе су силе трења $\vec{F}_{\mathrm{t}}$ и силе отпора средине $\vec{F}_{\mathrm{ot}}$. Ове силе имају смер супротан смеру релативне брзине тела (брзине у односу на везу), па успоравају тела у референтном систему везаном за везу.

Напомена: Треба нагласити да у неким референтним системима силе трења и отпора средине могу имати исти смер као брзине тела (види ИИИ начин решења задатка 11.91.С).

Трење клизања

Сила трења мировања једнака је сили која настоји да покрене тело, али супротног смера, све док је покретачка сила довољно мала. Порастом покретачке силе расте и сила трења мировања све док се тело не покрене. Тада сила трења постаје сила трења клизања, која износи:

$$F_{\mathrm{t}} = \mu N\,, \qquad \text{(У81)}$$

где је N интензитет нормалне реакција везе, тј. тела које делује силом трења на посматрано тело, а μ коефицијент трења клизања, који зависи од особина додирних површина тела и везе. Сила трења клизања је обично мало мања од максималне сила трења мировања. Због релативно мале разлике између ових сила, у току изучавања физике у средњој школи се о њој не води рачуна па неће ни у овој Збирци.

Трење котрљања

Сила трења котрљања износи:

$$F_{\mathrm{t,k}} = \frac{\mu_{\mathrm{k}} N}{r}\,, \qquad \text{(У82)}$$

где је μ_{k} коефицијент трења котрљања, а r полупречник површине која се котрља по равној површини. Знатно је мања од силе трења клизања за исте додирне површине.

Отпор средине

Сила отпора средине је сила којом се вискозна средина (течност или гас) супротставља кретању чврстог тела кроз њу. За мале брзине тела она износи:

$$\vec{F}_{\mathrm{ot}} = -b\vec{v}\,, \qquad \text{(У83)}$$

где је b коефицијент зависан од особина флуида и тела.

Нормалне реакције везе

Нормалне реакције везе су последица деформисања тела - везе од стране посматраног тела. Ако се ради о затезању везе о коју је тело обешено (нпр. нити), реакција се најчешће означава са $\vec{T}$ или $\vec{F}_{\mathrm{z}}$, а ако се ради о нормалној реакцији везе на притисак тела (нпр. реакција подлоге), реакција се обично означава са $\vec{N}$.

Напомена 1: Ако су тела повезана помоћу нити занемариве масе, силе међусобног деловања тела су једнаке по интензитету. При томе нит која спаја тела може бити прекидана телима занемариве масе или покретати тела занемариве масе, например котурове.

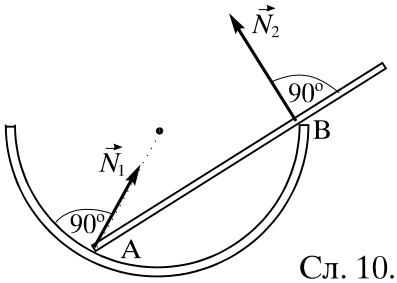
Напомена 2: Најчешће се у задацима занемарује истегљивост нити, а ако се и она разматра, морају бити познате еластичне особине нити. У равнотежи је тада сила затезања нити једнака еластичној сили која настоји да деформисану нит врати у недеформисано стање.

Напомена 3: Нормалне реакције на притисак тела су увек усмерене од тела - везе. При одређивању њиховог правца треба се придржавати следећих правила:

1) Ако тело на једном додирном месту додирује везу у тачкама које припадају једној граничној равни везе, нормална реакција везе је на том додирном месту нормална на ту раван (види например задатак 20.95.С.).

2) Ако тело на једном додирном месту додирује везу у тачкама које су у пресеку више граничних равни везе, нормална реакција везе се одређује на следећи начин: Замислимо мало померање тела чију равнотежу посматрамо тако да остане у контакту у свим додирним местима са свим телима са којима се додиривало. При томе се тачке којима је тело било у контакту са осталим телима крећу у неким равнима. Нормалне реакције везе су нормалне на те равни.

Пример: Одредимо правце нормалних реакција везе које делују на штап који се налази у равнотежи у чаши чија је унутрашња површ облика полулопте (види сл. 10).



Сл. 10.

Решење: Пошто на додирном месту **А** штап додирује чашу у тачкама које леже у једној равни - равни полулопте, нормална реакција $\vec{N}_1$ је нормална на ту раван и усмерена је ка центру полулопте. На додирном месту **В** штап додирује чашу у тачкама које припадају двема равнима - равни полулопте и равни обода чаше.

При малом померању штапа, при коме остаје у контакту са чашом на оба додирна места, тачке којима додирује чашу крећу се у равни у којој лежи штап, реакција подлоге $\vec{N}_2$ је нормална на ту раван, односно на штап и усмерена од везе - чаше.

<u>Еластичност опруге</u>

На опругу, мало деформисану по дужини (сабијену или растегнуту), делује еластична сила, која настоји да је врати у недеформисано стање, и која износи:

$$F = kx\,, \qquad (У84)$$

где је k крутост, а x апсолутна деформација опруге (апсолутна вредност промене дужине опруге).

Потисак

По Архимедовом закону, на тела потопљена у флуид (течност или гас) делује сила потиска, која је једнака тежини телом истиснуте течности, односно:

$$F = m_0 g = \rho_0 g V \,, \qquad \text{(У85)}$$

где су: m_0 - маса телом истиснутог флуида, ρ_0 - густина флуида и V запремина истиснутог флуида, једнака запремини тела у флуиду. Сила потиска је усмерена вертикално навише.

Центрипетална сила

Ако се тело креће по кружници, на њега делује центрипетална сила, која му саопштава центрипетално убрзање. Усмерена је ка центру кружнице и износи:

$$F_{\mathrm{cf}} = \frac{mv^2}{r} = mr\omega^2 \,. \qquad \text{(У86)}$$

Напомена 1: Центрипетална сила није никаква посебна нова сила, последица неке посебне интеракције. Она је једнака збиру пројекција свих сила, које делују на тело, на правац усмерен од тачке у којој се тело налази ка центру тренутне кружнице.

Напомена 2: Код криволинијског кретања је центрипетална сила усмерена ка центру тренутне кружнице.

Инерцијалне силе

У неинерцијалним референтним системима, тј. системима који се крећу убрзано, поред стварних сила, које су последице деловања између тела, делују и *инерцијалне* силе, као последица убрзаног кретања система. У референтном систему који се креће константним убрзањем $\vec{a}_0$, на тело масе m делује инерцијална сила:

$$\vec{F}_{\mathrm{in}} = -m\vec{a}_0 \,. \qquad \text{(У87)}$$

Напомена: Поред инерцијалних сила, које се могу изразити претходном једначином, у неинерцијалним референтним системима који ротирају делује и

Кориолисова сила, која зависи од брзине тела и угаоне брзине неинерцијалног система, али се она не проучава у средњим школама.

Центрифугална сила

Центрифугална сила је једна од инерцијалних сила. Делује у референтним системима који имају центрипетално убрзање. Усмерена је у супротном смеру од смера центрипеталног убрзања, односно од центра кружнице, или тренутне кружнице при криволинијском кретању тела. По интензитету је једнака центрипеталној сили:

$$F_{\mathrm{cf}} = \frac{mv^2}{r} = mr\omega^2 . \qquad \text{(У88)}$$

Рад

Елементарни (бесконачно мали) рад силе $\vec{F}$ на елементарном померају $\Delta\vec{r}$, односно елементарном путу Δs, износи:

$$A = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r} = F_{\mathrm{t}}\Delta r , \qquad \text{(У89)}$$

где је F_{t} интензитет тангенцијалне компоненте силе (компоненте у правцу тангенте на путању). Ако је F_{t} константно на путу s, рад (произвољно велики) силе на том путу износи:

$$A = F_{\mathrm{t}}s . \qquad \text{(У90)}$$

Позитиван је ако је тангенцијална компонента силе у смеру кретања, а негативан ако је у супротном смеру.

Елементарни рад момента силе $\vec{M}$ при ротацији тела за елементарни угао $\Delta\vec{\theta}$, износи:

$$A = \vec{M}\cdot\vec{\theta} = M_1\theta , \qquad \text{(У91)}$$

где је M_1 интензитет компоненте момента у правцу осе ротације. Ако је ова пројекција константна у току ротације тела за произвољан угао θ, рад (произвољно велики) износи:

$$A = \vec{M}\cdot\vec{\theta} = M_1\theta . \qquad \text{(У92)}$$

Позитиван је ако је компонента у смеру $\vec{\theta}$, а негативан ако је у супротном смеру.

Рад гравитационе силе на премештању масе $м$ из тачке гравитационог поља са потенцијалом φ_1 у тачку са потенцијалом φ_2 износи:

$$A = m(\varphi_1 - \varphi_2) . \qquad \text{(У93)}$$

Рад тела, односно, рад силе којом посматрано тело делује на друга тела, једнак је смањењу његове енергије:

$$A_{\text{tela}} = -\Delta E_{\text{tela}} = E_{\text{tela1}} - E_{\text{tela2}}\,, \qquad \text{(У94)}$$

а рад спољашње силе над телом, једнак је промени (повећању) енергије тела:

$$A_{\text{sp}} = \Delta E_{\text{tela}} = E_{\text{tela2}} - E_{\text{tela1}}\,. \qquad \text{(У95)}$$

Наравно оба рада, и тела и спољашње силе могу бити позитивни или негативни, у зависности од смера силе у односу на померај.

Рад се може одредити и из снаге (види следећи параграф). Ако тело развија снагу P, у бесконачно малом временском интервалу Δt, при томе изврши елементарни рад:

$$\Delta A = P\Delta t\,. \qquad \text{(У96)}$$

Ако је снага константна у произвољно великом времену t, извршени рад износи:

$$A = Pt\,. \qquad \text{(У97)}$$

О графичким начинима одређивања рада види поглавље "Математичке релације", параграф "Графичка интеграција", тачке 7-9.

<u>Снага</u>

Средња снага тела у временском интервалу t, које у том временском интервалу изврши рад A износи:

$$P = \frac{A}{t}\,. \qquad \text{(У98)}$$

Тренутна снага, или просто - снага, једнака је средњој снази у бесконачно малом временском интервалу.

Ако прво тело врши рад тако што на друго тело, које се креће брзином $\vec{v}$, делује силом $\vec{F}$, чији је интензитет тангенцијалне компоненте F_{t}, снага (тренутна) износи:

$$P = \vec{F}\cdot\vec{v} = F_{\text{t}}v\,. \qquad \text{(У99)}$$

При томе се каже да наведеном снагом рад врши прво тело над другим, или сила $\vec{F}$ над другим телом.

Ако момент силе $\vec{M}$, чији је интензитет компоненте у правцу осе ротације M_1, ротира тело угаоном брзином ω, снага којом овај момент врши рад износи:

$$P = \vec{M} \cdot \vec{\omega} = M_1 \omega . \qquad \text{(У100)}$$

Кинетичка енергија

Кинетичка енергија је условљена кретањем тела. Као и кретање, зависи од референтног система из кога се кретање посматра. Кинетичка енергија транслаторног кретања тела масе m, брзине $\vec{v}$ и импулса $\vec{p}$ износи:

$$E_{\mathrm{k}} = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m} . \qquad \text{(У101)}$$

Кинетичка енергија ротације тела чији су: момент инерције I, угаона брзина $\vec{\omega}$ и момента импулса $\vec{L}$, износи:

$$E_{\mathrm{k}} = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{L^2}{2I} . \qquad \text{(У102)}$$

Кинетичка енергија тела које врши сложено кретање (транслаторно и ротационо) једнака је збиру кинетичке енергије транслаторног и кинетичке енергије ротационог кретања.

Потенцијална енергија

Потенцијална енергија је енергија условљена међусобним деловањем тела. Као и силе међусобног деловања, зависи од међусобног положаја тела, тј. њихових координата.

Потенцијална енергија је физичка величина која је дефинисана до на константу, односно, може јој се додати или одузети произвољна константна вредност. Због тога се може произвољно одредити референтни распоред тела (ниво) нулте потенцијалне енергије.

Гравитациона потенцијална енергија између две материјалне тачке, хомогене лопте или хомогене сфере, маса $м_1$ и $м_2$, при растојању r између њихових центара, износи:

$$E_{\mathrm{p}} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r} , \qquad \text{(У103)}$$

ако се бесконачност изабере за ниво нулте потенцијалне енергије. γ је универзална гравитациона константа.

Гравитациона потенцијална енергија тела масе $м$ на површини Земље износи:

$$E_{\mathrm{p}} = mgh\,, \qquad \text{(У104)}$$

где је x висина у односу на произвољно изабрани референтни ниво, а g убрзање Земљине теже. У задацима је најчешће згодно за овај ниво изабрати ниво најниже тачке у коју се спушта маса у току посматраног кретања.

Једначина (У101) се може користити само ако је промена убрзања Земљине теже са висином занемарива, иначе се мора користити општа једначина (У100).

Потенцијална енергија еластично деформисане опруге износи:

$$E_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}kx^2\,, \qquad \text{(У105)}$$

где је k, крутост, а x апсолутна деформација опруге.

Закони одржања

Закони одржања олакшавају решавање многих задатака у којима су важна стања система на почетку и на крају неког процеса, а нису важни путеви преласка из почетног у крајње стање.

Многи задаци могу да се реше и без коришћења закона одржања, коришћењем других закона динамике, али је пут до решења на овај начин често много тежи.

Закон одржања енергије у механици

Укупна механичка енергија тела, или система тела, једнака је збиру кинетичке и потенцијалне енергије свих тела у систему:

$$E = \sum E_{\mathrm{k}} + \sum E_{\mathrm{p}}\,. \qquad \text{(У106)}$$

Ако у систему делују конзервативне силе, важи закон одржања меха-ничке енергије система, односно:

$$E = \mathrm{const}\,. \qquad \text{(У107)}$$

Ако у систему делују дисипативне силе, као што су сила трења и силе отпора средине, или механичка енергија може да прелази у неке друге видове енергије, Заокон о одржању механичке енергије не важи.

Напомена 1: Конзервативне силе су силе чији је рад на затвореној путањи нула и које зависе само од конфигурације система (распореда тела). Такве су, например, гравитационе, електричне и еластичне силе.

Напомена 2: Да би важио поменути закон, конзервативне силе могу деловати не само између тела посматраног система, као унутрашње силе, него могу деловати и на тела у систему од стране тела изван система, као спољашње силе. При томе се мора водити рачуна да се деловање спољашњих сила на тела у

систему не изрази два пута - преко рада ових сила и преко промене потенцијалне енергије тела у систему.

Пример: Ако тело слободно пада, пораст његове кинетичке енергије је једнак смањењу његове потенцијалне енергије у пољу силе Земљине теже, или раду силе Земљине теже, тј. једној од ове две величине, које су, наравно, једнаке. Честа грешка у решавању задатака полази од погрешног става да је промена кинетичке енергије условљена променом потенцијалне енергије и радом силе Земљине теже тј. збиру ових величина, чиме се утицај Земљине теже узима два пута у обзир.

Закон о одржању импулса

У систему у коме не делују спољашње силе важи Закон одржања импулса:

$$\vec{p} = \sum \vec{p}_i = \sum m_i \vec{v}_i = \text{const}, \qquad \text{(У108)}$$

или скаларно:

$$p_x = \sum p_{xi} = \sum m_i v_{xi} = \text{const}, \quad p_y = \sum p_{yi} = \sum m_i v_{yi} = \text{const},$$

$$p_z = \sum p_{zi} = \sum m_i v_{xi} = \text{const}. \qquad \text{(У109)}$$

Напомена 1: Закон се најчешће примењује при решавању проблема везаних за сударе, спајања и раздвајања тела.

Напомена 2: Као последица овог Закона, унутрашње силе не могу променити брзину кретања центра масе система.

Напомена 3: Закон може да важи само у једном правцу, дуж кога не делују спољашње силе. Например, може да важи за кретање дуж хоризонталне *x* - осе, ако у њеном правцу не делују спољашње силе, али не и за кретање дуж вертикалне *y* - осе, дуж које делује сила Земљине теже.

Напомена 4: Закон се може применити и на кретања у правцима у којима делују спољашње силе, ако се посматрају процеси који трају веома кратко, тако да је рад спољашњих сила у току посматраног процеса занемарив.

Закон о одржању момента импулса

Ако је укупан момент спољашњих сила које делују на систем једнак нули, онда је:

$$\vec{L} = \sum \vec{L}_i = \sum I_i \vec{\omega}_i = \sum \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \text{const}. \qquad \text{(У110)}$$

Напомена: Закон се најчешће примењује да би се одредио утицај промене распореда масе око осе ротације на угаону брзину система.

Апсолутно еластичан судар

У току апсолутно еластичнног судара, поред импулса, не мења се ни кинетичка енергија система. Две куглице маса $м_1$ и $м_2$, које су се кретале брзинама $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$, после чеоног апсолутно еластичног судара крећу се, брзинама $\vec{v}_1'$ и $\vec{v}_2'$, које износе:

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_2 + m_1} \qquad \text{и} \qquad v_2' = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1 v_1}{m_2 + m_1}. \qquad \text{(У111)}$$

Апсолутно нееластичан судар

После апсолутно нееластичног судара тела остају спојена. Ако су се куглице маса m_1 и m_2 пре судара кретале брзинама $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$, после чеоног апсолутно нееластичног судара крећу се брзином:

$$v = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} \qquad \text{(У112)}$$

Напомена: У неким књигама није наглашен векторски карактер брзина у једначинама (У108) и (У109). Такве једначине важе само у случају кретања куглица у истом смеру пре судара, односно, у случају сустизања куглица. Такав је случај, например, са ухбеником "Физика за I разред гимназије", издатим у Београду 1994.г. од Завода за ухбенике и наставна средства (стр. 126).

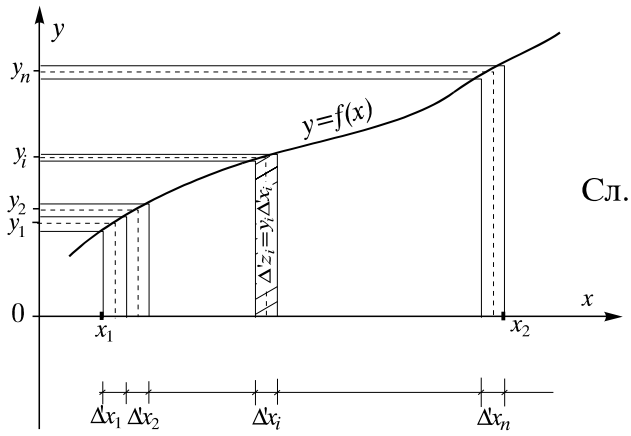
Табела 5. Аналогија између транслаторног и ротационог кретања

Транслаторно кретање	Ротационо кретање
Маса $м$	Момент инерције $И$ $(I = mr^2)$
Сила $\vec{F}$	Момент силе $\vec{M}$ $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$
Импулс $\vec{p} = m\vec{v}$	Момент импулса $\vec{L} = I\vec{\omega}$ $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v}$
Први Њутнов закон $\vec{v} = \text{const}$ при $\sum \vec{F}_i = 0$	Први Њутнов закон $\vec{\omega} = \text{const}$ при $\sum \vec{M}_i = 0$
Други Њутнов закон $\vec{F} = \sum \vec{F}_i = m\vec{a} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$	Основни зак. динамике ротације $\vec{M} = \sum \vec{M}_i = I\vec{\alpha} = \frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t}$
Услов равнотеже $\sum \vec{F}_i = 0$	Услов равнотеже $\sum \vec{M}_i = 0$
Рад $A = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F_т \Delta r$	Рад $A = \vec{M} \cdot \vec{\theta} = M_1 \theta$
Снага $P = \frac{A}{t} = F_t v$	Снага $P = \frac{A}{t} = M\omega$
Кинетичка енергија $E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m}$	Кинетичка енергија $E_k = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{L^2}{2I}$
Закон одржања импулса $\vec{p} = \sum \vec{p}_i = \sum m_i \vec{v}_i = \text{const}$	Закон одржања мом. импулса $\vec{L} = \sum \vec{L}_i = \sum I_i \vec{\omega}_i = \sum \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \text{const}$

НЕКЕ МАТЕМАТИЧКЕ РЕЛАЦИЈЕ

Графичка интеграција

Нека је зависност физичке величине y од физичке величине x дата једначином $y = y(x)$, чији је график приказан на сл. 14. Са Δ' означимо веома (бесконачно) мале промене (интервале) физичких величина.



Сл. 14.

Поделимо коначан (произвољно велики) интервал $\Delta x = x_2 - x_1$, промене физичке величине x, на веома много веома малих интервала $\Delta' x_i$ ($i = 1,2,3,\ldots,n,\ n \to \infty$), при чему је

$$\Delta x = x_2 - x_1 = \Delta' x_1 + \Delta' x_2 + \ldots + \Delta' x_n .$$

Ако се при веома малој (елементарној) промени вредности величине x за Δx, физичка величина z промени за веома малу вредност:

$$\Delta' z = y \Delta' x ,$$

где је y вредност функције $y = f(x)$ која одговара средини интервала $\Delta' x$, при коначној промени величине x за $x_2 - x_1$, величина z се промени за:

$$\Delta z = z_2 - z_1 = \Delta' z_1 + \Delta' z_2 + \ldots + \Delta' z_n = y_1 \Delta' x_1 + y_2 \Delta' x_2 + \ldots + y_n \Delta' x_n = \sum_{i=1}^{n} y_i \Delta' x_i \ .$$

Пошто су интервали $\Delta' x_i$ веома мали, промене вредности функције у оквиру њих су занемариве, односно, $y(x_i - \Delta' x_i) \approx y(x_i + \Delta' x_i)$, па производи $y_i \Delta' x_i$ представљају површине између графика и апсцисне (x) осе у интервалима $\Delta' x_i$. Величина Δz, као збир свих ових површина, једнака је површини између графика и апсцисе у целом интервалу $x_2 - x_1$. Краће речено:

При коначној промени физичке величине x за $x_2 - x_1$, физичка величина z се промени за вредност која је једнака површини између графика и апсцисне осе на графику зависности одговарајуће функције у од величине x, у посматраном интервалу. Под одговарајућом функцијом $y = f(x)$ подразумева се величина која повезује веома мале интервале величина x и z релацијом $\Delta' z = y \Delta' x$. У многим случајевима функција $y = f(x)$ представља једну физичку величину. На пример, ову функцију представља убрзање код једначине $\Delta' v = a \Delta' t$ (види последицу 1).

Напомена 1: Ако је $z_1 = 0$, тада је $\Delta z = z_2$, односно поменута површина представља вредност коју достиже величина z при промени величине x од x_1 до x_2. Код неких физичких величина се ретко користи појам промене, па и у том случају Δz има смисао вредности коју достиже величина z при промени величине x од x_1 до x_2. Такав је случај са радом.

Напомена 2: У најједноставнијим случајевима, када су поменуте површи облика геометријских фигура, израчунавање површина се врши једноставним геометријским методама. При томе се мора водити рачуна о димензијама координатних оса (види пример на крају параграфа).

У осталим случајевима израчунавање захтева познавање интегралног рачуна - сложенијег математичког апарата чије се основе уче у четвртом разреду гимназије.

Напомена 3: Када се физичка величина одређује на наведени начин, треба водити рачуна о знаку Δz. Он се одређује из физичког смисла положаја и облика графика у појединим деловима посматраног интервала промене физичке величине x (види пример на крају параграфа).

Напомена 4: Често се појам "површина између графика и апсцисне осе" назива "површина испод графика", иако то није сасвим коректно, јер се некада ради и о површини изнад графика (види пример на крају параграфа).

Последице: Ако се овај став примени на области физике заступљене у овој збирци, следи, поред осталог:

1) ***Промена брзине тела*** у одређеном временском интервалу једнака је површини испод графика $a = a(t)$, зависности убрзања од времена, у посматраном временском интервалу, пошто је, према једначини (У9), $\Delta' v = a\Delta' t$.

2) ***Пређени пут тела*** у одређеном временском интервалу једнак је површини испод графика $v = v(t)$, зависности брзине од времена, у посматраном временском интервалу, пошто је, према једначини (У8), $s' = v\Delta' t$.

3) ***Промена угаоне брзине тела*** у одређеном временском интервалу једнака је површини испод графика $\alpha = \alpha(t)$, зависности угаоног убрзања од времена, у посматраном временском интервалу, пошто је, према једначини (У50), $\Delta' \omega = \alpha\Delta' t$.

4) ***Угао ротације*** у одређеном временском интервалу једнак је површини испод графика $\theta = \theta(t)$, зависности угаоне брзине од времена, у посматраном временском интервалу, пошто је, према једначини (У47), $\theta' = \omega\Delta' t$.

5) ***Промена импулса тела, односно импулс силе*** у одређеном временском интервалу једнак је површини испод графика $F = F(t)$, зависности силе од времена, у посматраном временском интервалу, пошто је, према једначини (У74), $\Delta' p = F\Delta' t$.

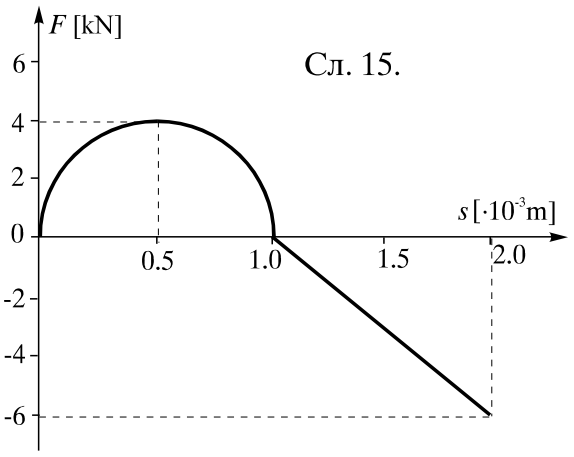
6) ***Промена момента импулса тела*** у одређеном временском интервалу једнака је површини испод графика $M = M(t)$, зависности момента силе од времена, у посматраном временском интервалу, пошто је, према једначини (У79), $\Delta' L = M\Delta' t$.

7) ***Рад силе*** на одређеном интервалу пута једнак је површини испод графика $F_{\mathrm{t}} = F_{\mathrm{t}}(s)$, зависности тангенцијалне компоненте силе пута, у посматраном интервалу пута, пошто је, према једначини (У89), $\Delta' A = F_{\mathrm{t}}\Delta' s$.

8) ***Рад момента силе*** на одређеном интервалу угла ротације једнак је површини испод графика $M_1 = M_1(\theta)$, зависности пројекције момента силе на угао ротације од угла, у посматраном интервалу угла ротације, пошто је, према једначини (У91), $\Delta' A = M_1\Delta' \theta$.

9) ***Рад*** у одређеном временском интервалу једнак је површини испод графика $P = P(t)$, зависности снаге од времена, у посматраном временском интервалу, пошто је, према једначини (У96), $\Delta' A = P\Delta' t$.

Пример: На сл. 15. је приказана зависност тангенцијалне компоненте силе која делује на тело од пређеног пута тела. На првом делу пута график има облик полукруга. Одредити рад ове силе над телом на представљеном делу пута.



Сл. 15.

Решење: Полукруг над првим делом пута има физички смисао полуелипсе, јер полупречници имају различите димензије. Очигледно, полуосе ове елипсе износе: $a = 5\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}$ и $b = 4\mathrm{kN} = 4\cdot 10^{3}\,\mathrm{N}$. Површина испод другог дела графика је једнака површини половине правоугаоника страница $c = 6\mathrm{kN} = 6\cdot 10^{3}\,\mathrm{N}$ и $d = 2\cdot 10^{-2}\,\mathrm{N}$. Површине посматраних полуелипсе и половине правоугаоника износе:

$$S_1 = ab\pi \approx 62.8\,\mathrm{J}, \qquad S_2 = \frac{1}{2}cd = 60\,\mathrm{J}.$$

Негативна сила на другом делу пута показује да је сила на том делу пута супротног смера од смера кретања тела (помераја), па је одговарајући рад негативан. Тражени рад је једнак алгебарском збиру радова на појединим деловима пута, и износи:

$$A = A_1 + A_2 = 62.8\,\mathrm{J} + (\text{-}60\,\mathrm{J}) = 2.8\,\mathrm{J}.$$

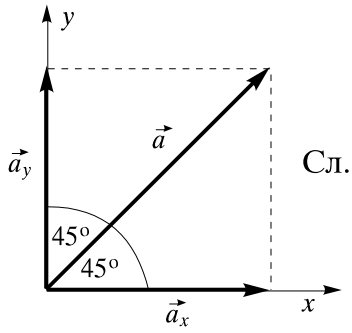
<u>Пројекције вектора</u>

Пројекције вектора на правце, односно интензитете компонената вектора у одређеним правцима, у општем случају могуће је одредити помоћу тригонометријских функција, које се уче у другом разреду гимназије. Са знањем ученика првог разреда проблем се може решити у специјалним случајевима, када правац вектора и правац на који се вектор пројектује заклапају углове од 30°, 45° и 60°.

Посматрајмо вектор $\vec{a}$ и одредимо интензитете његових пројекција у поменутим специјалним случајевима:

1) **<u>Угао од 45°:</u>** Због односа странице и дијагонале квадрата (види слику 16), важе односи:

$$a_x = a_y = \frac{a\sqrt{2}}{2} \qquad \text{(У124)}$$

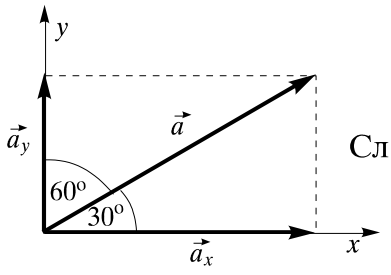


Сл. 16.

1) **<u>Углови од 30° и 60°:</u>** Због односа страница и висине једнакостраничног троугла (види слику 17), важе односи:

$$a_x = \frac{a\sqrt{3}}{2} \qquad \text{(У125)}$$

$$a_y = \frac{a}{2} \qquad \text{(У126)}$$



Сл. 17.

Квадратна једначина

Општи облик квадратне једначине по x је:

$$ax^2 + bx + c = 0\,, \qquad \text{(У127)}$$

где су a, $б$, и c константе.

Решења квадратне једначине су:

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\ . \qquad \text{(У128)}$$

У зависности од вредности подкорене величине - дискриминанте зависи колико има и каква су решења квадратне једначине.

а) Ако је $b^2 - 4ac > 0$ једначина има два реална решења:

$$x_{1/2} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{и} \qquad x_{1/2} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\,. \qquad \text{(У129)}$$

б) Ако је $b^2 - 4ac > 0$ једначина има једно реално решење:

$$x = -\frac{b}{2a}\,. \qquad \text{(У130)}$$

ц) Ако је $b^2 - 4ac < 0$ једначина нема реалних решења.

Напомена: У задацима из физике, од поменута два решења квадратне једначине, по правилу, физички смисао има само једно. Друго, математички исправно решење, даје најчешће физички бесмислен резултат. Један од проблема у таквим задацима је и избор решења које има физички смисао.

Z A D A C I

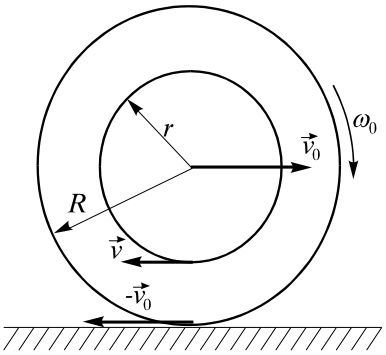
1.91.O. Kolika treba da bude brzina automobila, da bi ukrasni poklopac ("radkapna"), koji je u pokretu spao sa točka automobila, čim dodirne put počeo da se kotrlja bez proklizavanja. Poluprečnik točka je R = 25 cm, a poklopac se može smatrati homogenim diskom poluprečnika r = 12 cm. Usporavanje kretanja poklopca u vertikalnom pravcu traje τ = 0.5 s. Pretpostaviti da u toku ovog usporavanja na poklopac deluje konstantna sila trenja. Koeficijent trenja klizanja između poklopca i puta iznosi μ = 0.2.

Rešenje: Pošto točak ne proklizava, tačka točka u kojoj on dodiruje zemlju miruje u odnosu na zemlju. Ako se automobil kreće brzinom $\vec{v}_0$ istom brzinom se kreće i osa rotacije točka u odnosu na zemlju i dodirnu tačku. Prema jednačini (U11), tačka u kojoj točak dodiruje zemlju kreće se u odnosu na osu rotacije brzinom (perifernom) $-\vec{v}_0$, suprotnog smera od smera kretanja automobila (vidi prvu sliku u rešenju).

Ugaona brzina rotacije poklopca se ne menja u toku njegovog padanja, odnosno, ista je na točku i neposredno pre dodira zemlje. Ako je izrazimo preko veličina vezanih za točak i veličina vezanih za poklopac, može se dobiti:

$$\omega_0 = \frac{v_0}{R} = \frac{v}{r},$$

pa brzina perifernih tačaka poklopca neposredno pre dodira zemlje iznosi:

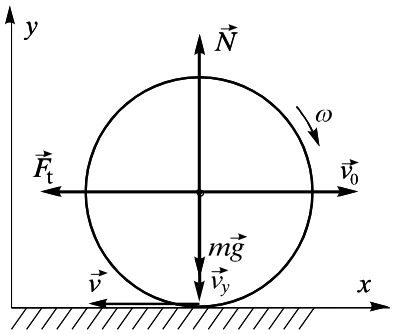


$$v = \frac{r}{R} v_0 < v_0 .$$

Posle odvajanja od točka centar mase poklopca se kreće kao horizontalni hitac. Kada se spusti za $R - r$, tj. u trenutku kada poklopac dodirne zemlju, y - komponenta brzine ose rotacije valjka iznosi:

$$v_y = \sqrt{2g(R-r)}.$$

S druge strane, duž x - ose, osa rotacije poklopca se i dalje kreće po inerciji brzinom $v_x = v_0$ (vidi drugu sliku u rešenju). Da ne bi došlo do proklizavanja poklopca, moraju periferne tačke poklopca da se zaustave u odnosu na zemlju, odnosno, translatorna brzina ose rotacije poklopca treba da se smanji sa v_0 na v. Prema tekstu zadatka, "prilagođavanje" kretanja poklopca podlozi traje τ . To je vreme u kome treba da dođe do navedene promene translatorne brzine poklopca pod dejstvom sile trenja, odnosno vreme za koje normalna reakcija podloge treba da zaustavi kretanje poklopca po vertikali.



Pošto je, po uslovu zadatka, sila trenja $\vec{F}_t$ u toku "prilagođavanja" konstantna, konstantna je i reakcija podloge $\vec{N}$, koja deluje na poklopac. Pošto pored ovih sila na poklopac deluje konstantna sila Zemljine teže $m\vec{g}$, prema jednačini (U74), Drugi Njutnov zakon za translatorno "prilagođavanje" poklopca glasi:

$$\vec{F}_t + \vec{N} + m\vec{g} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \frac{m\vec{v} - m\vec{v}_0}{\tau} .$$

Projekcija ove jednačine na x - osu ima oblik:

$$-F_t = \frac{mv - mv_x}{\tau} = \frac{m(v - v_0)}{\tau}, \qquad (1)$$

a projekcija na y - osu oblik:

$$N - mg = \frac{0 - (-mv_y)}{\tau} = \frac{mv_y}{\tau},$$

pa je:

$$N = mg + \frac{mv_y}{\tau} = m \qquad \left[g + \frac{\sqrt{2g(R-r)}}{\tau} \right].$$

Na rotaciju poklopca utiče moment sile trenja, pa se Osnovni zakon dinamike rotacije može napisati u skalarnom obliku na sledeći način:

$$F_t r = \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{I(\omega - \omega_0)}{\tau} = \frac{1}{2} m r^2 \frac{(\omega - \omega_0)}{\tau} = \frac{mr^2}{2\tau}\left(\frac{v}{r} - \frac{v_0}{R}\right). \qquad (2)$$

Eliminacijom sile trenja iz jednačina (1) i (2), može se odrediti brzina koju treba da ima poklopac da ne bi proklizavao, koja iznosi:

$$v = \frac{2R + r}{3R} v_0 ,$$

Uvrštavanjem ove vrednosti u jednačinu (1), može se odrediti sila trenja, koja može da izvrši navedena "prilagođavanja" kretanja poklopca, koja iznosi:

$$F_{\mathrm{t}} = \frac{m}{\tau}(v_0 - v) = \frac{m}{\tau}\left(v_0 - \frac{2R+r}{3R}v_0\right) = \frac{m}{\tau}\frac{R-r}{3R}v_0 .$$

Da ne bi došlo do proklizavanja poklopca navedena sila trenja mora biti sila statičkog trenja, koja je uvek manja ili jednaka sili trenja klizanja, koja iznosi:

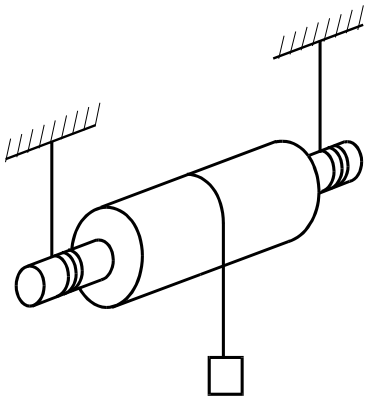
$$F_{\mathrm{t,k}} = \mu N = \mu m\left[g + \frac{\sqrt{2g(R-r)}}{\tau}\right],$$

odnosno, mora biti:

$$\frac{m}{\tau}\frac{R-r}{3R}v_0 \le \mu m\left[g + \frac{\sqrt{2g(R-r)}}{\tau}\right].$$

Iz poslednje nejednačine se može odrediti brzina automobila pri kojoj ne dolazi do proklizavanja poklopca, koja mora biti:

$$v_0 \le 3\mu \qquad R\sqrt{\frac{2g}{R-r}} \approx 1.8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 6.6\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} .$$



2.91.O. Valjak poluprečnika $2R$ sa osovinom poluprečnika R visi u horizontalnom položaju na nitima, koje su omotane oko osovine kao na slici. Masa valjka sa osovinom iznosi m_0, a moment inercije u odnosu na osu rotacione si-metrije iznosi I. Na niti namotanoj na valjak visi teg mase m. Odrediti ubrzanje tega kada se sistem kreće u polju Zemljine teže. Obe neistegljive niti, zanemarljive mase, omotane su oko valjka tako da teže da ga zarotiraju u istom smeru.

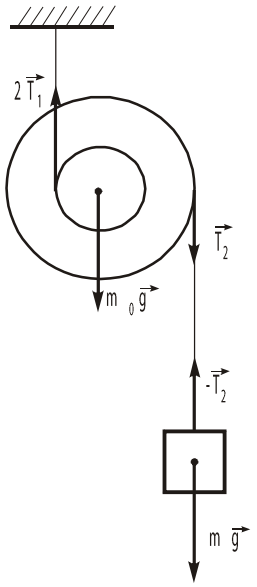
Rešenje: Ubrzanje ose rotacije valjka u odnosu na zemlju $\vec{a}_0$, odnosno u odnosu na nit na kojoj visi valjak, jednako je po intenzitetu ubrzanju iste niti, u odnosu na osu rotacije $\vec{a}'$. Pošto je poslednje ubrzanje, jednako tangencijalnom ubrzanju perifernih tačaka osovine, može se pisati:

$$a_0 = a' = R\alpha ,$$

gde je α ugaono ubrzanje valjka.

Dok se nit na kojoj visi valjak odmota za *l*, centar mase valjka se spusti za istu vrednost. Za isto vreme se nit na kojoj visi teg odmota za 2*l*, a teg supusti za 3*l*. Zbog toga je ubrzanje tega u odnosu na zemlju $\vec{a}$ trostruko veće od ubrzanja centra mase valjka u odnosu na zemlju $\vec{a}_0$, odnosno:

$$a = 3a_0 \qquad (1)$$



Kretanje valjka i osovine uslovljavaju dve jednake sile zatezanja u nitima o koje je obešen $\vec{T}_1$, sila zatezanja niti na kojoj visi teg $\vec{T}_2$, sila Zemljine teže $m_0\vec{g}$, i njihovi momenti (vidi sliku u rešenju), pa se zakoni dinamike za njihovo translatorno i rotaciono kretanje mogu napisati u obliku:

$$m_0\vec{g} + 2\vec{T}_1 + \vec{T}_2 = m_0\vec{a}_0 ,$$

$$\vec{M}_{m_0 g} + \vec{M}_{2T_1} + \vec{M}_{T_2} = I\vec{\alpha} .$$

Projekcije prve jednačine na vertikalni pravac, a druge na pravac normalan na ravan crteža imaju oblik:

$$m_0 g - 2T_1 + T_2 = m_0 a_0 , \qquad (2)$$

$$2T_1 R + T_2 2R = I\alpha = I\frac{a_0}{R} . \qquad (3)$$

Kretanje tega uslovljavaju sila Zemljine teže $m\vec{g}$ i sila zatezanja niti o koju je obešen $-\vec{T}_2$, pa Drugi Njutnov zakon za njegovo kretanje, u vektorskom i skalarnom obliku, glasi:

$$m\vec{g} + (-\vec{T}_2) = m\vec{a} ,$$

$$mg - T_2 = ma .$$

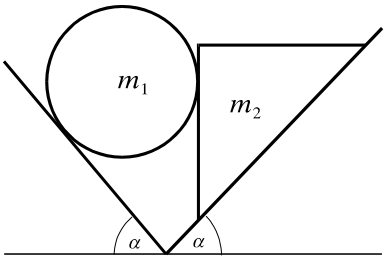
Ako se iz poslednje jednačine izrazi $T_2 = mg - ma$ i uvrsti u jednačine (2) i (3), vodeći računa o jednačini (1), jednačine (2) i (3) se mogu napisati u obliku:

$$m_0 g - 2T_1 + mg - ma = m_0 a_0 = \frac{m_0 a}{3} ,$$

$$2T_1 + 2mg - 2ma = I\frac{a_0}{R^2} = I\frac{a}{3R^2} .$$

Posle sabiranja poslednjih jednačina, lako se može odrediti traženo ubrzanje tega, koje iznosi:

$$a = \frac{3(3m + m_0)R^2}{I + (9m + m_0)R^2}\, g .$$



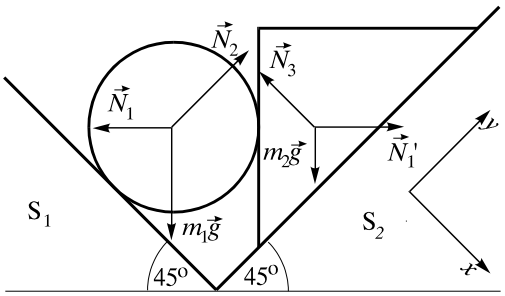
3.91.O. Niz dve idealno glatke strme ravni, koje obrazuju jednake uglove α = 45° sa horizontalom, kreću se, dodirujući se međusobno, cilindar mase m_1 = 5 kg i klin m_2 = 10 kg (vidi sliku). Odrediti silu kojom klin deluje na cilindar, ako je trenje između klina i cilindra zanemarljivo?

Rešenje: Na cilindar deluju: sila Zemljine teže $m_1\vec{g}$, normalna reakcija od klina $\vec{N}_1$ i normalna reakcija $\vec{N}_2$ od strme ravni S_1 (vidi prvu sliku u rešenju), pa se Drugi Njutnov zakon za kretanja cilindra može pisati u obliku:

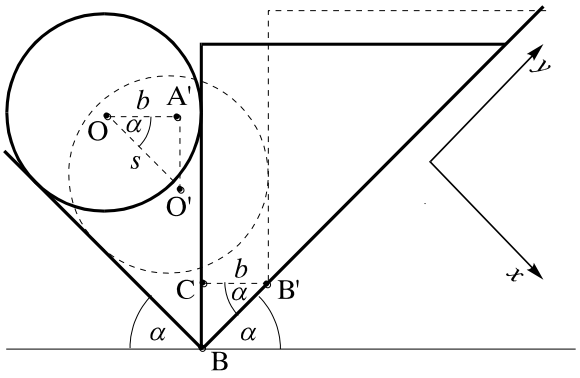
$$m_1\vec{a}_1 = \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + m\vec{g}\ . \qquad (1)$$

Na klin deluju: sila Zemljine teže $m_2\vec{g}$, normalna reakcija $\vec{N}_3$ od strme ravni S_2 i normalna reakcija od cilindra $\vec{N}_1'$. Prema Zakonu akcije i reakcije ona iznosi $\vec{N}_1' = -\vec{N}_1$, pa se Drugi Njutnov zakon za kretanje cilindra može pisati u obliku:

$$m_2\vec{a}_2 = \vec{N}_3 + \vec{N}_1' + m_2\vec{g} \qquad (2)$$



Pri pomeranju po strmoj ravni S_1 ose cilindra za s, dodirna površina klincilindar se pomeri za b (vidi drugu sliku u rešenju). Pošto su trouglovi OO'A i BB'C podudarni, to je $BB' = s$, odnosno, pređeni putevi ose cilindra i klina su jednaki. Zbog toga je ubrzanje klina u pravcu y - ose po intenzitetu jednako ubrzanju ose cilindra u pravcu x - ose. Označimo intenzitet ovih ubrzanja sa a.



Pošto je $N_1' = N_1$, projekcije jednačine (1) na x - osu i jednačine (2) na y - osu glase:

$$m_1 a = -\frac{\sqrt{2}}{2} N_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} m_1 g \ ,$$
$$m_2 a = \frac{\sqrt{2}}{2} N_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} m_2 g \ .$$

Pošto su trenja u sistemu zanemarljiva, sile reakcija strmih ravni $\vec{N}_2$ i $\vec{N}_3$, očigledno, ne utiču na kretanje klina i cilindra

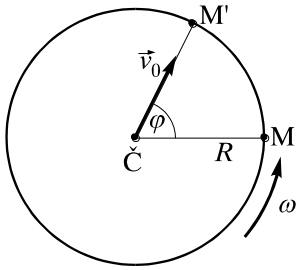
Eliminacijom ubrzanja iz poslednje dve jednačine, nije teško odrediti traženu silu kojom klin deluje na cilindar, a koja iznosi:

$$N_1 = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \approx 65.4\,\mathrm{N} \ .$$

6.91.RP. Čovek se nalazi na horizontalnoj platformi, koja rotira ugaonom brzinom $\omega = 3$ rad/s, i gađa metu na istoj platformi. U prvom slučaju se čovek nalazi u centru platforme, a meta na periferiji, na rastojanju R = 10 m od njega. U drugom slučaju čovek i meta zamene mesta. Pod kojim uglom, u odnosu na pravac čovek-meta, čovek treba gurnuti malo telo po platformi da bi pogodilo metu, u oba slučaja. Početna brzina tela u odnosu na platformu je v_0 = 60 m/s. Trenje između tela i platforme zanemariti.

Rešenje: Slučaj I. Pošto na telo ne deluju sile u horizontalnoj ravni (trenje između tela i platforme zanemarljivo), ono se, u inercijalnom referentnom sistemu, tj. u odnosu na zemlju, kreće prema meti ravnomerno pravolinijski, brzinom jednakom početnoj brzini (vidi prvu sliku). Jednačine kretanja platforme i tela mogu se napisati u obliku:

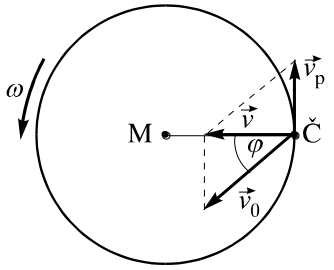
$$\varphi = \omega t \qquad \text{i} \qquad s = v_0 t \ .$$



Da bi čovek (Č) pogodio metu (M) u tački M', telo mora preći put $s = R$, za vreme dok se platforma zarotira za traženi ugao. Eliminacijom vremena, iz prethodnih jednačina, moguće je odrediti traženi ugao, koji iznosi:

$$\varphi = \omega t = \omega \frac{R}{v_0} = 0.5\mathrm{rad} \ .$$

Slučaj II. Periferna brzina tačke $\vec{v}_\text{p}$, u kojoj se nalazi čovek (Č), ima intenzitet $v_\text{p} = R\omega$. Telo treba gurnuti tako da mu ukupna brzina $\vec{v}$, kao vektorski zbir ove brzine i brzine tela u odnosu na platformu $\vec{v}_0$, bude usmerena ka centru, tj. meti (M) (vidi drugu sliku). Odnos periferne i početne brzine iznosi:



$$\frac{v_\text{p}}{v_0} = \frac{R\omega}{v_0} = \frac{1}{2}.$$

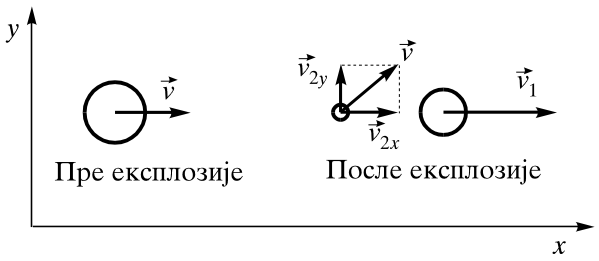
Prema jednačini (U126), to znači da je ugao φ jednak 30°. Drugim rečima, u ovom slučaju telo treba gurnuti pod uglom od 30°, u odnosu na pravac čovek-meta, da bi pogodilo metu.

7.91.RP. Granata, koja leti brzinom v = 50 m/s, raspada se pri eksploziji na dva dela. Veći deo, čija masa iznosi 75% mase cele granate, nastavlja da se kreće u istom smeru brzinom v_1 = 75 m/s. Odrediti brzinu manjeg dela granate, neposredno posle eksplozije. Komentarisati dobijeni rezultat.

Rešenje: Mase većeg i manjeg dela granate iznose $0.75m$ i $0.25m$, gde je m masa cele granate. Pošto eksplozija granate traje veoma kratko, na nju se može primeniti Zakon o održanju impulsa, koji se može napisati u obliku:

$$m\vec{v} = 0.75m\vec{v}_1 + 0.25m\vec{v}_2.$$

Ako koordinatni sistem postavimo tako da se pravac x - ose poklapa sa pravcem kretanja granate i njenog većeg parčeta, a da je pravac y - ose normalan na ovaj pravac (vidi sliku), projekcije prethodne jednačine na x i y - osu imaće oblik:



$$mv = 0.75mv_1 + 0.25mv_{2x},$$

$$0 = 0 + 0.25v_{2y}\,.$$

Iz druge jednačine je, očigledno, $v_{2y} = 0$, odnosno, manje parče granate se kreće takođe u pravcu x - ose brzinom koja može da se odredi iz prve jednačine, i koja iznosi :

$$v_{2x} = \frac{mv - 0.75mv_1}{0.25m} = \frac{v - 0.75v_1}{0.25} = -25\frac{\text{m}}{\text{s}}\,.$$

Znak minus pokazuje da se manji deo granate kreće u suprotnom smeru od smera x - ose, tj. od smera kretanja granate i njenog većeg parčeta.

8.91.RP. Na tankoj niti dužine l = 1 m visi mala kuglica (matematičko klatno). U trenutku $t_0 = 0$ tačka oslonca počinje da se kreće ravnomerno pravolinijski brzinom v u horizontalnoj ravni. Posle kog vremena treba zaustaviti (trenutno) tačku oslonca pa da kuglica ostane da miruje.

Rešenje: Ako se opisano kretanje posmatra iz referentnog sistema vezanog za oslonac, u trenutku $t_0 = 0$, oslonac miruje, a kuglica počinje da se kreće početnom brzinom v. Drugim rečima, iz ovog sistema, početak opisanog kretanja izgleda kao polazak kuglice običnog matematičkog klatna iz ravnotežnog položaja.

Kada kuglica završi jednu punu oscilaciju u navedenom sistemu će imati istu brzinu v, odnosno, u sistemu vezanom za okolinu imaće brzinu nula. Ako u tom trenutku trenutno prestane kretanje oslonca, kuglica će ostati da miruje.

Prema tome, da bi kuglica stala, kretanje oslonca treba zaustaviti posle vremena koje je jednako periodu matematičkog klatna, koje ima dužinu kao posmatrana nit, odnosno, posle vremena:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \approx 2\,\text{s}\,.$$

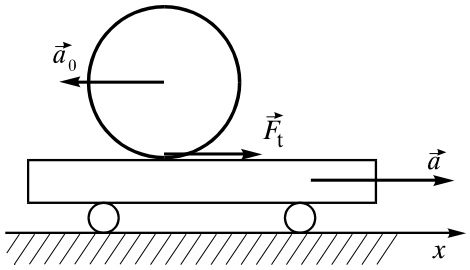
9.91.RP. Na horizontalnoj platformi kolica, koja se kreću konstantnim ubrzanjem a, nalazi se pun homogen valjak. Usled ovog kretanja kolica, valjak se kotrlja po površini kolica bez proklizavanja u suprotnom smeru od smera kretanja kolica. Odrediti odnos ubrzanja centra mase valjka, u odnosu na zemlju, i ubrzanja kolica, ako je moment inercije valjka $mr^2/2$.

Rešenje: Valjak rotira usled delovanja sile trenja (vidi sliku), pa se Osnovni zakon dinamike rotacije valjka može napisati u obliku:

$$I\alpha = \frac{1}{2}mr^2\alpha = F_{\text{tr}}r\ .$$

Pošto nema proklizavanja, ubrzanje ose rotacije valjka, u odnosu na kolica, jednako je po intenzitetu tangencijalnom ubrzanju perifernih tačaka valjka u odnosu na osu njegove rotacije i iznosi:

$$a_0 = r\alpha = \frac{2F_{\text{t}}}{\text{m}}. \qquad (1)$$



Ubrzanje ose rotacije valjka, u odnosu na zemlju, prema jednačini (U12), iznosi $\vec{a}_z = \vec{a} + \vec{a}_0$, a intenzitet mu je $a_z = a - a_0$. Translaciju valjka u horizontalnom pravcu vrši sila trenja, pa se Drugi Njutnov zakon za njegovo kretanje može napisati u obliku:

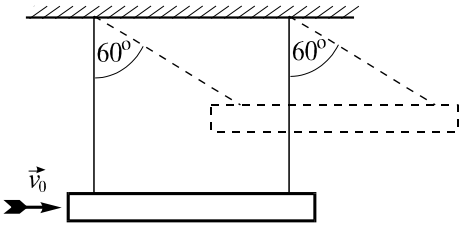
$$\vec{F}_{\text{t}} = m\vec{a}_z = m(\vec{a} + \vec{a}_0)\ ,$$

Ako se uzme u obzir jednačina (1), projekcija ove jednačine na x - osu može se napisati u obliku:

$$F_{\text{t}} = m(a - a_0) = \frac{ma_0}{2}\ .$$

Odavde se lako može odrediti traženi odnos ubrzanja, koji iznosi:

$$\frac{a_z}{a} = \frac{a - a_0}{a} = \frac{1}{3}.$$



10.91.RP. Metak mase m = 10 g leti horizontalno i udara u horizontalnu dasku mase M = 2 kg, koja je obešena o dva užeta dužine po l = 1 m, i ostaje u njoj. Posle udara užad se otklone od vertikale za 60° (vidi sliku). Odrediti brzinu metka pre udara u dasku v_0. Zanemariti vreme zaustavljanja metka u dasci.

Rešenje: Pošto udar metka u dasku traje kratko, na sudar se može primeniti Zakon o održanju impulsa, čija se projekcija na horizontalni pravac može napisati u obliku:

$$mv_0 = (m + M)v\ , \qquad (1)$$

gde je v brzina sistema metakdaska neposredno posle udara.

Pri kretanju ovog sistema posle sudara, kinetička energija prelazi u potencijalnu, pa se Zakon održanja energije za sistem može napisati u obliku:

$$(m+M)gh=\frac{m+M}{2}v^2,$$

gde je h maksimalna promena visine sistema. Iz ove jednačine sledi da je:

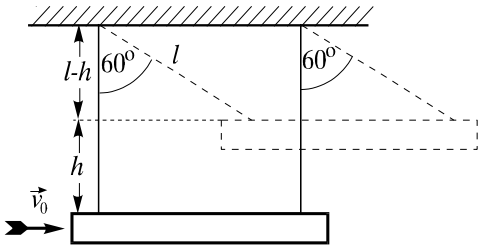
$$v=\sqrt{2gh}\,. \qquad (2)$$

Pošto ugao između maksimalno pomerenih užadi i vertikale iznosi 60°, prema jednačini (U126), važi sledeći geometrijski odnos (vidi sliku u rešenju):

$$l-h=\frac{1}{2}l,$$

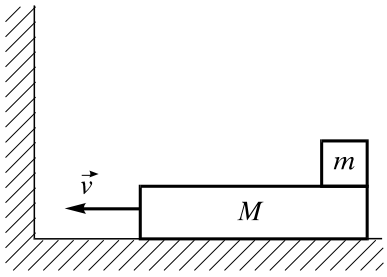
pa je

$$h=\frac{1}{2}l\,. \qquad (3)$$



Iz jednačina (1), (2) i (3) može se odrediti tražena brzina metka, koja iznosi:

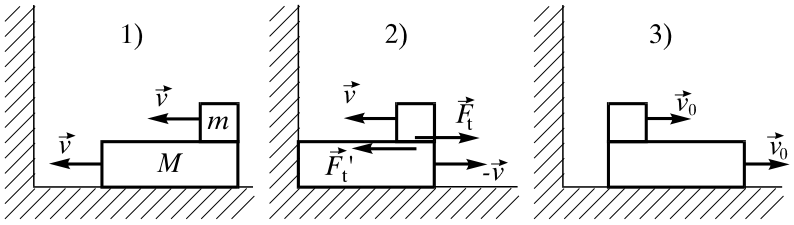
$$v_0=\frac{m+M}{m}v=\frac{m+M}{m}\sqrt{2gh}=\frac{m+M}{m}\sqrt{gl}\approx 630\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,.$$



11.91.S. Paralelepiped dužine l nalazi se na horizontalnoj idealno glatkoj površini. Na jedan kraj paralelepipeda je postavljeno telo čija je veličina zanemarljiva u odnosu na dužinu grede. Odnos mase grede i mase tela je n. Odrediti najveću brzinu kojom može da se kreće paralelepiped, da posle njegovog elastičnog sudara sa vertikalnim zidom, telo ne padne sa njega (vidi sliku). Koeficijent trenja između tela i paralelepipeda je μ.

Rešenje: Neposredno posle elastičnog odbijanja od zida, paralelepiped se vraća unazad brzinom $-\vec{v}$, koja je po intenzitetu jednaka brzini $\vec{v}$, koju je imao pre sudara. Međutim, telo na gredi nastavlja da se kreće, po inerciji, brzinom $\vec{v}$, koju je imalo pre udara paralelepipeda u zid (vidi položaje 1 i 2 na slici u rešenju zadatka).

Pošto na kretanje posmatranih tela po horizontali ne utiču direktno vertikalne sile (utiču posredno preko sile trenja), sila Zemljine teže i reakcija podloge, na slikama u rešenju ove slike nisu predstavljene. Na kretanje po horizontali utiču samo sile trenja $\vec{F}_{\mathrm{t}}$ i $\vec{F}_{\mathrm{t}}'$. Po Zakonu akcije i reakcije ove sile imaju isti intenzitet. Lako se može



pokazati

$$F_{\mathrm{t}} = \vec{F}_{\mathrm{t}} = \mu m g \,.$$

Pri najvećoj brzini koju sme da ima sistem pre udara u zid, a da telo ne padne sa paralelepipeda $v_{\max}$, telo treba da zaustavi sila trenja na drugom kraju paralelepipeda.

Zbog ilustracije različitih prilaza istom problemu, nastavak zadatka će biti rešen na tri načina.

I način: Pomenute sile trenja paralelepipedu i telu, prema Drugom Njutnovom zakonu, saopštavaju usporenja:

$$a_M = \frac{F_{\mathrm{t}}'}{\mathrm{M}} = \frac{\mu \quad mg}{M} = \frac{\mu g}{n} \qquad \text{i} \qquad a_m = \frac{F_{\mathrm{t}}}{m} = \mu g \qquad (1)$$

U referentnom sistemu vezanom za paralelepiped, neposredno posle sudara paralelepipeda i zida, telo se, prema jednačini (U10), kreće brzinom:

$$v_{\mathrm{rel}} = v + v = 2v \,, \qquad (2)$$

koja predstavlja početnu brzinu ravnomerno usporenog kretanja tela po paralelepipedu. Usporenje tela u ovom referentnom sistemu, prema jednačini (U12), iznosi:

$$a = a_m + a_M = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\mu g \,.$$

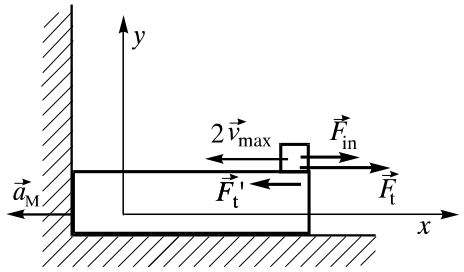
Krećući se ovim usporenjem, prema jednačini (U31), do zaustavljanja telo prelazi put:

$$s = \frac{(2v)^2}{2a} = \frac{2v^2}{\mu \quad g\left(1+\frac{1}{n}\right)}.$$

Tražena maksimalna brzina $v_{\max}$, kojom može da se kreće paralelepiped pre udara u zid, može se odrediti iz prethodne jednačine, uzimajući da je $v = v_{\max}$ za $s = l$, i iznosi:

$$v_{\max} = \sqrt{\left(1+\frac{m}{M}\right)\frac{\mu g l}{2}} = \sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{\mu g l}{2}}. \qquad (3)$$

II način: U referentnom sistemu vezanom za paralelepiped kreće se samo telo na njemu. Ovaj sistem je neinercijalan, kreće se ubrzanjem paralelepipeda $\vec{a}_{\mathrm{M}}$, čiji je intenzitet dat jednačinom (1). U tom sistemu, pored sile trenja $\vec{F}_{\mathrm{t}}$, nad telom vrši rad inercijalna sila $\vec{F}_{\mathrm{in}} = -m\vec{a}_M$ (vidi drugu sliku u rešenju).



Obe sile imaju suprotan smer od smera brzine (pomeraja), tako da im je rad negativan. Ako se paralelepiped pre sudara kretao traženom maksimalnom brzinom $v_{\max}$, prema jednačini (2), brzina tela neposredno posle sudara, u ovom sistemu, iznosi $2v_{\max}$. Telo se zaustavlja na kraju paralelepipeda, zahvaljujući radu navedenih sila, koji iznosi:

$$A = -F_{\mathrm{t}} l - -F_{\mathrm{in}} l = -\mu mgl - \frac{\mu m^2 g}{M} l = -\mu mgl\left(1+\frac{m}{M}\right)$$

Ovaj rad je, prema jednačini (U95), jednak promeni energije tela, u ovom slučaju kinetičke, pa se može pisati:

$$A = -\mu mgl = \Delta E_{\mathrm{k}} = E_{\mathrm{k2}} - E_{\mathrm{k1}} = -E_{\mathrm{k1}} = \frac{1}{2} m(2v_{\max})^2 = 2mv_{\max}^2.$$

Iz ove jednačine se može lako odrediti tražena maksimalna brzina paralelepipeda, data jednačinom (3).

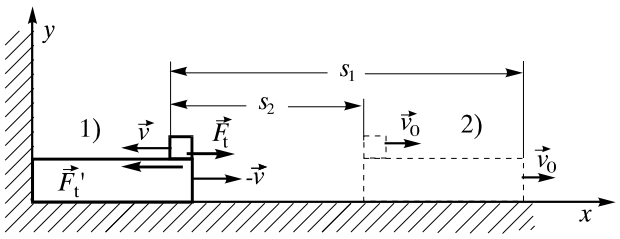
III način: Između trenutka neposredno posle sudara (položaj 1 na trećoj slici u rešenju) i trenutka zaustavljanja tela na drugom kraju (položaj 2 na istoj slici) paralelepipeda na sistem ne deluju spoljašnje sile u pravcu *x* - ose, pa se na kretanje može primeniti Zakon o održanju impulsa.

Ako se telo zaustavi u odnosu na paralelepiped na njegovom kraju, brzina tela i paralelepipeda u odnosu na zemlju su iste, označimo je sa $\vec{v}_0$. U tom slučaju intenziteti brzine paralelepipeda i tela u položaju 1 odgovaraju traženoj maksimalnoj brzini

paralelepipeda $v_{\max}$, pa se projekcija Zakona o održanju impulsa na x - osu može napisati u obliku:

$$Mv - mv = (M + m)v_0 . \tag{4}$$

Pretpostavimo da su paralelepiped i telo neposredno posle sudara i u trenutku zaustavljanja tela na kraju paralelepipeda raspoređeni kao na trećoj slici u rešenju. Zbog pretpostavljenih smerova pomeraja u odnosu na sile, rad paralelepipeda nad telom iznosi $F_t' s_2$, a rad tela nad paralelepipedom $-F_t s_1$, gde su s_1 i s_2 odgovarajući pređeni putevi. Pošto je veličina tela mala, to je $s_1 - s_2 = l$, pa ukupan rad izvršen nad paralelepipedom i telom iznosi:



$$A = A_M + A_m = F_t' s_2 - F_t s_1 = \mu mg s_2 - \mu mg s_1 = \mu mg(s_2 - s_1) = -\mu mgl$$

$$= \mu mg(s_2 - s_1) = -\mu mgl$$

Ovaj rad je, prema jednačini (U95), jednak promeni energije sistema, u ovom slučaju kinetičke, pa se može pisati:

$$A = -\Delta E = -\Delta E_k = E_{k1} - E_{k2} .$$

Ako se uzme u obzir da tražena maksimalna brzina paralelepipeda odgovara zaustavljanju tela na njegovom kraju, prethodna jednačina se može napisati u obliku:

$$-\mu mgl = \frac{(m+M)v'^2}{2} - \left(\frac{mv_{\max}^2}{2} + \frac{Mv_{\max}^2}{2} \right). \tag{5}$$

Eliminacijom brzine v_0 iz jednačina (4) i (5), može se odrediti tražena maksimalna brzina, data jednačinom (3).

Napomena: Treba primetiti da smo na trećoj slici u rešenju slobodno pretpostavili da je $s_1 > l$, zbog čega je pomeraj tela na paralelepipedu u smeru sile trenja $\vec{F}_t$. Zbog toga je rad ove sile pozitivan, što može biti na prvi pogled neobično.

Treba naglasiti da rad sile trenja zavisi od referentnog sistema iz koga se kretanje posmatra. Rad pojedinih sila trenja, kao unutrašnjih sila nekog sistema, može biti pozitivan u nekom referentnom sistemu. Da bi to bilo ilustrovano pretpostavljen je raspored tela prikazan na slici. Međutim, ukupan rad svih sila trenja u izolovanom sistemu je uvek negativan, pa smanjuje energiju sistema.

Korišćenjem zakona dinamike, lako se može pokazati da je u ovom zadatku $s_2 < 0$, odnosno da smer pomeraja na trećoj slici u rešenju nije dobro pretpostavljen, pa je i rad sile trenja koja deluje na telo na paralelepipedu negativan.

1.92.O. Brod **A** je dugačak l_A = 65 m, a brod **B** l_B = 40 m. Ako brodovi plove rekom u istom smeru, brod A prestiže brod **B** za t_1 = 70 s**.** Ako se brodovi kreću jedan drugom u susret, njihovo mimoilaženje traje t_2 = 14 s**.** Odrediti brzine brodova na mirnoj vodi, ako njihovi motori u svim slučajevima rade istom snagom.

Rešenje: Vreme potrebno za prestizanje i mimoilaženje brodova zavisi od relativne brzine jednog broda u odnosu na drugi, a ne zavisi od referentnog sistema odakle se kretanje posmatra, pa ni od kretanja vode. Najjednostavnije je posmatrati navedeno kretanje iz referentnog sistema vezanog za jedan od brodova. U tom sistemu drugi brod prelazi put $l_A + l_B$ i pri prestizanju i pri mimoilaženju. Iz referentnog sistema vezanog za brod **B**, intenzitet brzine kojom brod **A** prolazi pored njega u slučaju prestizanja iznosi $v_A - v_B$, a u slučaju mimoilaženja $v_A + v_B$. Ako primenimo jednačinu (U17) na ravnomerno kretanje pri prestizanju i mimoilaženju može se pisati:

$$l_A + l_B = (v_A - v_B)t_1 \quad \text{i}$$
$$l_A + l_B = (v_A + v_B)t_1 .$$

Iz ovog sistema jednačina se mogu odrediti tražene brzine brodova u odnosu na vodu, koje iznose:

$$v_A = \frac{(l_A + l_B)(t_1 + t_2)}{2t_1 t_2} = 4.5\frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \text{i}$$

$$v_A = \frac{(l_A + l_B)(t_1 - t_2)}{2t_1 t_2} = 3\frac{\text{m}}{\text{s}} .$$

Ovo su, istovremeno, i tražene brzine brodova u odnosu na obalu, kada voda miruje.

2.92.O. Kompozicija voza se sastoji od vagona iste dužine. Posmatrač, koji u trenutku polaska voza stoji pored prednje strane prvog vagona, primetio je da je ovaj vagon prošao pored njega za vreme $t_1 = 4\text{s}$. Ako se voz kreće ravnomerno ubrzano, odrediti koliko će vremena pored posmatrača prolaziti deveti vagon. Zanemariti rastojanje između vagona.

Rešenje: Posmatrajmo kretanje prvog, prvih osam i prvih devet vagona. Pošto su sva ova kretanja ravnomerno ubrzana, bez početne brzine, pređeni putevi i odgovarajuća vremena prolaska pored posmatrača, povezani su jednačinama (vidi jednačinu (U27)):

$$l = \frac{1}{2}at_1^2, \qquad 8l = \frac{1}{2}at_8^2 \quad \text{i} \quad 9l = \frac{1}{2}at_9^2.$$

Vreme kretanja devetog vagona pored posmatrača je jednako razlici vremena prolaska prvih devet (t_9) i vremena prolaska prvih osam vagona (t_8), odnosno:

$$\Delta t = t_9 - t_8 = t_1(3 - 2\sqrt{2}) = 0.7\text{s}.$$

4.92.O. Koliko bi trebalo da traje dan na Zemlji da bi tela na njenom Ekvatoru bila u bestežinskom stanju? Poluprečnik Zemlje na Ekvatoru iznosi R = 6370 m.

Rešenje: Na Ekvatoru na telo mase m deluju sila Zemljine teže $m\vec{g}$ i normalna reakcija podloge $\vec{N}$ (vidi prvu sliku u rešenju zadatka), pa se Drugi Njutnov zakon za njegovo kretanje može napisati u obliku:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}.$$

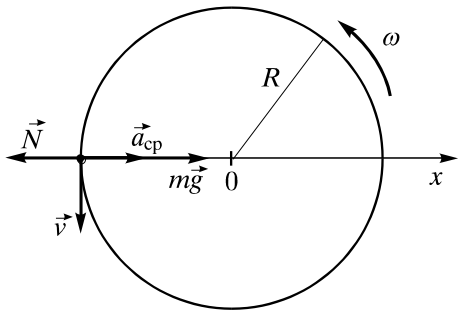
Projekcija ove jednačine na x - osu ima oblik:

$$ma_{\text{cp}} = mg - N, \tag{1}$$

gde su a_{cp} centripetalno ubrzanje i ma_{cp} centripetalna sila. Težina tela je po intenzitetu jednaka normalnoj reakciji podloge, odnosno:

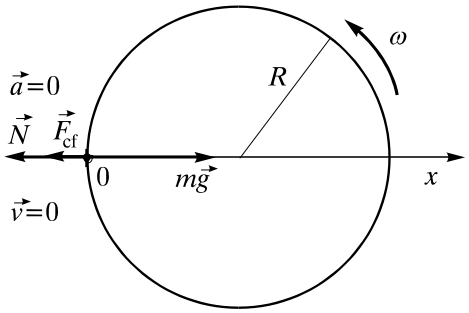
$$Q = N = mg - ma_{\text{cp}} = mg - mR\omega^2 = mg - mR\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2. \tag{2}$$

U besežinskom stanju tela ne deluju na podlogu, pa time ni podloga na njih, tj. $Q = N = 0$. Posle uvrštavanja ovog uslova u prethodnu jednačinu, moguće je odrediti period rotacije Zemlje, pri kome bi postijalo besežin-sko stanje na Ekvatoru, koji iznosi:



$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} \approx 5600\text{s} \approx 1^{\text{h}}24'.$$

Napomena 1. Zadatak je rešen tako što je kretanje posmatrano iz referentnog sistema vezanog za osu rotacije Zemlje, koji se može smatrati približno inercijalnim, ako se zanemari kretanje Zemlje oko Sunca. U tom sistemu telo kruži zahvaljujući postojanju stvarne, centripetalne sile. Rešimo ga i u neinercijalnom sistemu, vezanom za telo na Ekvatoru. U njemu pos-matrano telo miruje, a na njega, prema jednačinama (U87) i (U88), pored pomenutih deluje i inercijalna, centrifugalna sila $\vec{F}_{\text{cf}} = -m\vec{a}$ (vidi drugu sliku u rešenju), pa se Drugi Njutnov zakon, za kretanje tela u ovom sistemu, može napisati u obliku:



$$0 = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{cf}} = m\vec{g} + \vec{N} - m\vec{a}\,.$$

Pošto je ubrzanje neinercijalnog sistema u stvari centripetalno ubrzanje referentnog tela na Ekvatoru, ova jednačina je ekvivalentna jednačini (1), pa bi dalje rešavanje zadatka teklo na već opisani način.

Napomena 2. Malo komplikovanija varijanta zadatka bi zahtevala i određivanje ubrzanja Zemljine teže, ako su poznati masa Zemlje M i univerzalna gravitaciona konstanta γ. U tom slučaju bi, prema jednačini (U85), jednačina (2) imala oblik:

$$Q = N = \gamma\frac{mM}{R^2} - \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2,$$

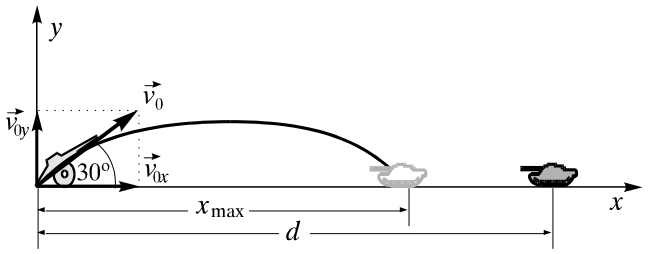
pa bi tražena dužina dana iznosila:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{\gamma M}} \approx 5600\text{s} \approx 1^{\text{h}}24'.$$

7.92.RG. Tenk se kreće po pravoj putanji prema topu stalnom brzinom v = 36 km/h. Kojom početnom brzinom treba ispaliti granatu iz topa, pod uglom α = 30°, da bi pogodila tenk, koji se u trenutku ispaljivanja nalazio na rastojanju d = 8 km?

Rešenje: Ispaljena granata se kreće kao kosi hitac (vidi sliku u rešenju). Iz geometrijskih odnosa (vidi jednačine (U125) i (U126)) sledi da komponente početne brzine granate u smeru koordinatnih osa iznose:

$$v_{0x} = \frac{\sqrt{3}}{2} v_0 \qquad \text{i} \qquad v_{0y} = \frac{1}{2} v_0 .$$



Prema jednačini (U39), domet granate, kao domet kosog hica, iznosi:

$$x_{\max} = \frac{2 v_{0x} v_{0y}}{g} = \frac{\sqrt{3} v_0^2}{2g} .$$

Prema jednačini (U39), ukupno vreme leta granate, kao vreme kretanja kosog hica, iznosi:

$$t_u = \frac{2 v_{0y}}{g} = \frac{v_0}{g} .$$

Za vreme leta granate tenk prelazi put:

$$s = v t_u = \frac{v v_0}{g} .$$

Da bi granata pogodila tenk, domet granate mora biti jednak razlici početnog rastojanja top - tenk i puta koji tenk pređe za vreme leta granate ($x_{\max} = d - s$). Uvrštavanjem dobijenih veličina u ovu jednakost, i sređivanjem izraza, može se dobiti kvadratna jednačina za određivanje tražene početne brzine granate:

$$\sqrt{3} v_0^2 + 2 v v_0 - 2 g d = 0 .$$

Fizički smisao ima samo pozitivno rešenje jednačine, pa tražena početna brzina granate iznosi:

$$v_0 = \frac{-2v + \sqrt{4v^2 + 8\sqrt{3}gd}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}v}{3}\left(\sqrt{1 + \frac{2\sqrt{3}gd}{v^2}} - 1\right) \approx 295\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

9.92.RG. Metalna kugla mase M pusti se da slobodno pada sa visine H = 40 m. Istovremeno se sa zemlje, ispod kugle, ispali metak mase m u njenom pravcu, početnom brzinom v_0 = 200 m/s. Prilikom sudara metak se zabije u kuglu i ostaje u njoj. Odrediti odnos masa kugle i metka M/m, pri kome će sistem kugla-metak posle sudara početi da pada bez početne brzine. Zanemariti dimenzije kugle.

Rešenje: Neka je x - osa usmerena vertikalno duž putanje tela, sa koordinatnim početkom na površini zemlje. Kretanja kugle i metka su ravnomerno ubrzana sa ubrzanjem Zemljine teže (vidi sliku u rešenju). Jednačine kretanja ovih tela odredićemo korišćenjem jednačine (U22), gde je:

za kuglu: $x_0 = H$ $v_{0x} = 0$ $a_x = -g$,

za metak: $x_0 = 0$ $v_{0x} = v_0$ $a_x = -g$.

Jednačine kretanja kugle i metka mogu se napisati u obliku:

$$x_1 = H - \frac{1}{2}gt^2 \quad \text{i} \quad x_2 = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2.$$

Do sudara dolazi kad su koordinate kugle i metka jednake ($x_1 = x_2$), odnosno, kada je:

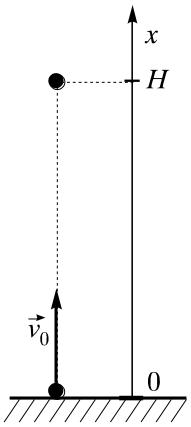
$$H - \frac{1}{2}gt^2 = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2.$$

Odavde se može odrediti vreme nakon koga dolazi do sudara, koje iznosi:

$$t = \frac{H}{v_0}.$$

Brzine kugle i metka neposredno pre sudara, prema jednačini (U19), posle uvrštavanja vremena, mogu se napisati u obliku:

$$v_\text{k} = gt = \frac{gH}{v_0} \qquad v_\text{m} = v_0 - gt = v_0 - \frac{gH}{v_0}.$$



Pošto sudar metka i kugle traje veoma kratko, važi Zakon održanja impulsa:

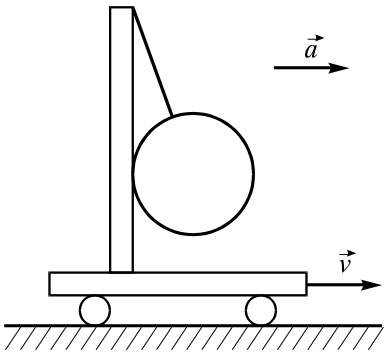
$$m\vec{v}_{\mathrm{m}} + M\vec{v}_{\mathrm{k}} = (m+M)\vec{v}\,.$$

Prema uslovu zadatka, brzina sistema kugla-metak posle sudara (v) treba da bude nula, pa se projekcija ove jednačine na x - osu može napisati u obliku:

$$mv_{\mathrm{m}} - Mv_{\mathrm{k}} = (M+m)v = 0\,,$$

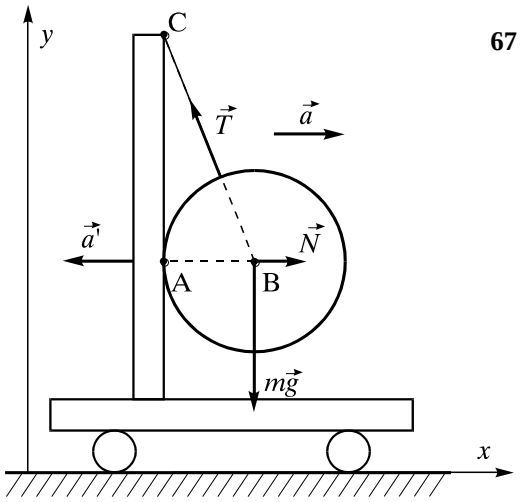
pa je traženi odnos masa jednak:

$$\frac{M}{m} = \frac{v_{\mathrm{m}}}{v_{\mathrm{k}}} = \frac{v_0^2}{gH} - 1 \approx 101\,.$$



12.92.RP. O vrh masivnog stuba, koncem zanemarljive mase, dužine l, obešena je kugla radijusa R, i naslonjena na stub (vidi sliku). Stub je pričvršćen za kolica koja se kreću u označenom smeru ubrzanjem koje se menja sa vremenom po zakonu $a(t) = -kt$, gde je k pozitivna konstanta. Posle koliko vremena će doći do odvajanja kugle od stuba?

Rešenje: Postavimo koordinatni sistem kao na prvoj slici u rešenju zadatka. Negativno ubrzanje kolica u smeru njihovog kretanja, odnosno u smeru x - ose, znači da kolica, u stvari, imaju ubrzanje u suprotnom smeru $\vec{a}'$, čiji intenzitet iznosi kt. Dok je kugla oslonjena na stub, na nju deluju sila Zemljine teže $m\vec{g}$, sila normalne reakcije veze stuba $\vec{N}$ i sila zatezanja konca $\vec{T}$, pa se Drugi Njutnov zakon za kretanje kugle može napisati u obliku:



$$m\vec{a}' = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{T}\ .$$

Projekcije ove jednačine na x i y osu mogu se napisati u obliku:

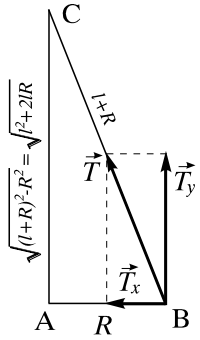
$$-ma' = N - T_x \quad \text{i}$$

$$0 = -mg + T_y\ .$$

Iz geometrijskih odnosa, tj. sličnosti trougla AVS i trougla sila (vidi drugu sliku u rešenju), može se dobiti:

$$T_x = T\frac{R}{l+R}$$

$$T_y = T\frac{\sqrt{l^2+2lR}}{l+R}\ .$$



U trenutku kada stub prestane delovati na kuglu, tj. kada postane $\vec{N} = 0$, dolazi do odvajanja kugle od stuba. Ako se iskoristi ovaj uslov, iz prethodnih jednačina se lako može dobiti:

$$ma' = mkt = T_x = T\frac{R}{l+R} = T_y\frac{l+R}{\sqrt{l^2+2lR}}\frac{R}{l+R} = mg\frac{R}{\sqrt{l^2+2lR}}$$

Iz poslednje jednačine se može odrediti vreme, nakon koga će se kugla odvojiti od stuba, koje iznosi:

$$t = \frac{g}{k}\frac{R}{\sqrt{l^2+2lR}}\ .$$

13.92.RP. Ako našu planetu možemo smatrati homogenom kuglom radijusa R = 6372 km, odrediti na kojoj je dubini ispod površine Zemlje ubrzanje Zemljine teže jednako ubrzanju na istoj tolikoj visini iznad njene površine. Pri rešavanju zadatka voditi računa o tome da na telo na dubini h ne deluje sloj Zemlje sa manje dubine, odnosno da se delovanja pojedinih delova ovog sloja na telo poništavaju.

Rešenje: Ako se masa Zemlje $M = \frac{4}{3}\rho\pi R^3$ uvrsti u jednačinu (U85) može se dobiti ubrzanje Zemljine teže na visini h iznad površine Zemlje, koje iznosi:

$$g_h = \gamma \frac{M}{(R+h)^2} = \frac{4}{3}\gamma\rho\pi \frac{R^3}{(R+h)^2}.$$

Prema tekstu zadatka, za privlačenje tela na dubini h je odgovoran deo Zemlje poluprečnika R - h. Masa tog dela Zemlje M', može se odrediti izjednačavanjem gustine Zemlje izražene preko mase cele Zemlje i preko mase njenog posmatranog dela, odnosno:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}R^3\pi} = \frac{M'}{V'} = \frac{M'}{\frac{4}{3}(R-h)^3\pi}.$$

Odavde je masa dela Zemlje koji privlači telo na dubini h jednaka:

$$M' = M\frac{(R-h)^3}{R^3}.$$

Analogno jednačini (U84), za ubrzanje Zemljine teže na dubini *h* se može dobiti:

$$g'_h = \gamma \frac{M'}{(R-h)^2} = \frac{4}{3}\gamma\rho\pi(R-h).$$

Prema uslovu zadatka je $g'_h = g_h$. Izjednačavanjem izraza dobijenih za ove veličine, može se dobiti kubna jednačina po h:

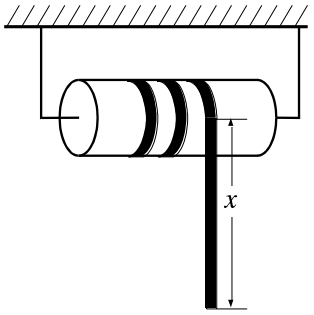
$$h^3 + Rh^2 - R^2h = h\left(h^2 + Rh - R^2\right) = 0.$$

Trivijalno rešenje ove kubne jednačine je *h* = 0. Druga dva rešenja su rešenja kvadratne jednačine $h^2 + Rh + R^2 = 0$, koja glase:

$$h_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} R.$$

Pošto je pretpostavljeno da *h* predstavlja apsolutne vrednosti visine i dubine, negativno rešenje nema fizičkog smisla. Prema tome, tražena dubina iznosi:

$$h = R\frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 3938\text{km}.$$



14.92.RP. Pun homogeni valjak, radijusa *R* i mase *M*, može slobodno da rotira oko nepokretne horizontalne ose koja prolazi kroz centre njegovih bazisa. Na valjak je jednim slojem namotano tanko neistegljivo uže dužine *l* i mase *m*, kao na slici. Odrediti ugaono ubrzanje valjka u funkciji dužine *x* odmotanog dela užeta. Uzeti da je centar mase namotanog dela užeta na osi cilindra. Moment inercije valjka oko ove ose iznosi $I = MR^2/2$.

Rešenje: Umesto odmotanog dela užeta, može se posmatrati teg iste mase koji visi na neistegljivoj niti zanemarljive mase (vidi slike u rešenju). Masa odmotanog užeta može se odrediti iz proporcije:

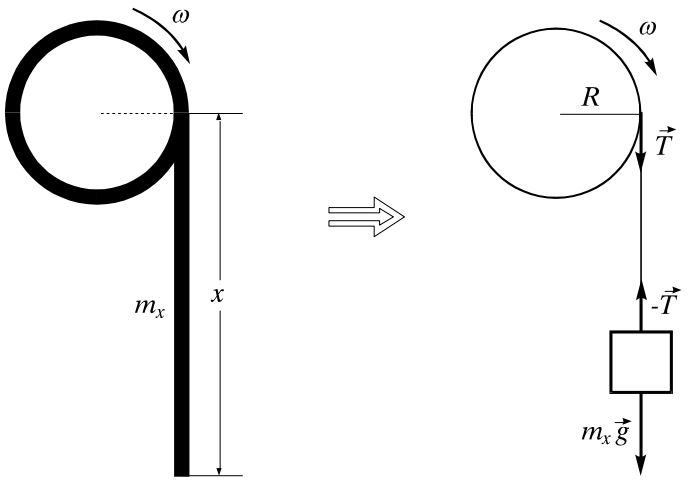
$$\frac{m_x}{m} = \frac{x}{l} \qquad \text{i iznosi} \qquad m_x = \frac{mx}{l}.$$

Pošto je uže tanko, pa su mu sve tačke praktično na jednakoj udaljenosti od ose rotacije, moment inercije užeta na valjku je jednak momentu inercije materijalne tačke iste mase na istoj udaljenosti od ose rotacije, i iznosi $(m - m_x)R^2$. Moment inercije valjka i užeta namotanog na njega iznosi:

$$I = \frac{1}{2}MR^2 + (m - m_x)R^2 = \left[\frac{M}{2} + m\left(1 - \frac{x}{l}\right)\right]R^2.$$

Valjak i deo užeta na njemu rotira sila zatezanja niti, pa Osnovni zakon dinamike rotacije ovog sistema glasi:

$$RT = I\alpha .$$



Na deo užeta koji visi deluju sila Zemljine teže i sila zatezanja, pa se Drugi Njutnov zakon za njegovo kretanje može napisati u obliku:

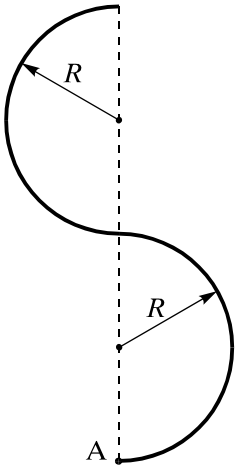
$$m_x a = m_x g - T ,$$

Ako se uzme u obzir da je ubrzanje užeta koje visi jednako tangencijalnom ubrzanju perifernih tačaka valjka, odnosno, da je $a = a_t = R\alpha$, vodeći računa o ranijim izrazima, prethodna jednačina se može napisati u obliku:

$$\frac{mx}{l} R\alpha = \frac{mx}{l} g - \left[\frac{M}{2} + m\left(1 - \frac{x}{l}\right) \right] R\alpha .$$

Iz ove jednačine se može izraziti tražena zavisnost ugaonog ubrzanja valjka od dužine užeta koje visi x, koja ima oblik:

$$\alpha(x) = \frac{2mg}{Rl(M + 2m)} x .$$

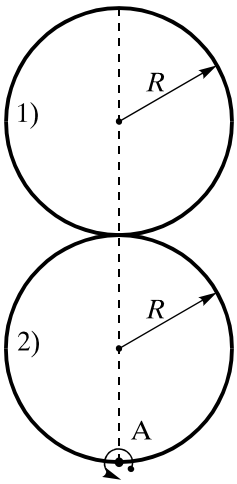


15.92.RP. Štajnerova teorema glasi: Ako je I_0 moment inercije tela mase m oko ose O koja prolazi kroz njegov centar mase, onda je njegov moment inercije oko ose **O'** paralelne osi **O** i na rastojanju d od nje dat izrazom:

$$I = I_0 + md^2 .$$

U svetlu ove teoreme odrediti moment inercije komada tanke homogene žice dužine l i mase m, savijenog u obliku dva jednaka polukruga, koji su tako spojeni da čine latiničo slovo "S" (vidi sliku), oko ose normalne na ravan slike i koja prolazi kroz jedan njegov kraj (tačka A na slici).

Rešenje: Moment inercije je aditivna veli-čina, pa se moment inercije date žice može odrediti kao polovina momenta inercije žice u obliku broja **8**, sastavljenog od krugova navedenog poluprečnika (vidi sliku u rešenju zadatka).



Pošto je l obim oba polukruga, njihov poluprečnik iznosi:

$$R = \frac{l}{2\pi}.$$

Pošto je žica tanka, moment inercije jedne kružne žice, oko ose koja prolazi kroz njen centar, i normalne na ravan u kojoj leži, iznosi:

$$I_0 = mR^2.$$

Po Štajnerovoj teoremi, moment inercije oko tražene ose, za krug 2 koji dodiruje osu, iznosi:

$$I_1 = I_0 + md_1^2 = mR^2 + mR^2 = 2mR^2,$$

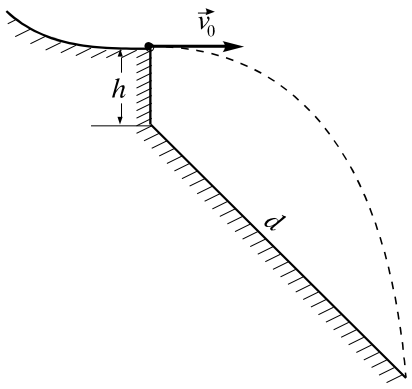
dok za krug 1 iznosi:

$$I_2 = I_0 + md_2^2 = mR^2 + m(3R)^2 = 10mR^2.$$

Zbog aditivnosti momenta inercije, moment inercije "osmice" je jednak zbiru ova dva momenta, dok je traženi moment inercije žice jednak njegovoj polovini, odnosno:

$$I = \frac{I_1 + I_2}{2} = 6mR^2 = \frac{3}{2\pi^2} ml^2.$$

Savezno takmičenje 1992, Obrenovac



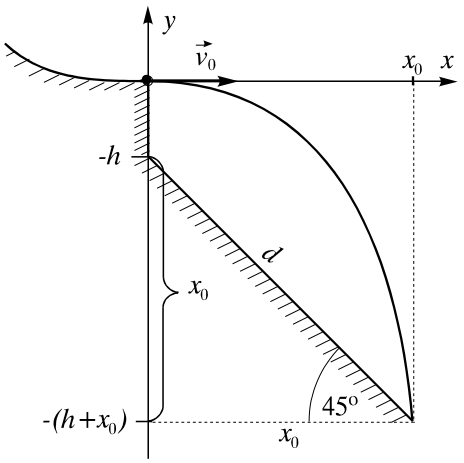
16.92.S. Skakač napušta rampu skakaonice brzinom $v_0 = 34\,\mathrm{m/s}$, u horizontalnom smeru. Visina rampe iznosi h = 4.2 m u odnosu na podnožje, koje zaklapa ugao od 45° prema horizontali (vidi sliku). Odrediti dužinu skoka skakača d, tj. rastojanje između podnožja skakaonice i mesta gde skakač dodirne podlogu, ako se trenja zanemaruju.

Rešenje: Skakač se može smatrati materijalnom tačkom u opisanom kretanju, koje se odvija po zakonima kretanja kosog hica. Ako koordinatni sistem postavimo kao na slici u rešenju zadatka, jednačine kretanja skakača imaju oblik:

$$x = vt \qquad \text{i} \qquad y = -h - \frac{1}{2}gt^2 .$$

Eliminacijom vremena iz ovih jednačina, može se dobiti jednačina putanje skakača, koja ima oblik:

$$y = -h - \frac{gx^2}{2v^2} .$$



Pošto je podloga nagnuta pod uglom od $45°$ u odnosu na horizontalu, dodirna tačka skakača sa podlogom je spuštena ispod podnožja za isto rastojanje x_0, koje skakač pređe duž x - ose (vidi sliku u rešenju). Uvrštavanjem koordinata mesta dodira skakača i podloge ($y = -h - x_0$ i $x = x_0$) u jednačinu putanje, može se dobiti:

$$-h - x_0 = -h - \frac{gx_0^2}{2v^2} ,$$

odnosno:

$$gx_0^2 - 2v^2x_0 - 2v^2h = 0 .$$

Rešenja ove kvadratne jednačine po x_0 (vidi jednačinu (U127) jesu:

$$x_{0\frac{1}{2}} = \frac{v^2 \pm \sqrt{v^4 + 2v^2gh}}{g} .$$

Fizički smisao ima samo pozitivno rešenje jednačine, pa je:

$$x_{0\frac{1}{2}} = \frac{v^2 \pm \sqrt{v^2 + 2v^2gh}}{g} ,$$

a traženo rastojanje iznosi:

$$d = \sqrt{2}x_0 = \frac{\sqrt{2}v}{g}\left(v + \sqrt{v^2 + 2gh}\right) \approx 338\text{m} .$$

6.93.RG. Čovek je odveslao iz pristaništa niz vodu s_1 = 20 km i vratio se nazad posle T = 7 časova. Pri povratku, na rastojanju s_2 = 12 km od pristaništa, sreo je splav, koji je pored pristaništa prošao u trenutku kada je on krenuo na put. Odrediti brzinu v_n kojom je čamac plovio niz reku. Pretpostaviti da je čovek sve vreme putovanja veslao istom snagom u pravcu toka reke i da je otpor kretanju čamca konstantan.

Rešenje: Pošto u zadatku nije naglašeno, podrazumeva se da je potrebno odrediti brzinu čamca u odnosu na obalu, kada plovi niz reku. Pošto čovek sve vreme vesla istom snagom u pravcu toka reke i pošto je otpor kretanju čamca konstantan, prema jednačini (U99), brzina čoveka u odnosu na reku je konstantna, označimo je sa v_1.

Brzina čamca u odnosu na obalu je jednaka zbiru brzine čamca u odnosu na reku i brzine toka reke *u*, pri kretanju čamca niz reku, odnosno razlici ovih brzina, pri kretanju čamca uz reku. Prema tome, vreme kretanja čamca niz vodu i vreme kretanja čamca uz vodu, do povratka u pristanište, iznose:

$$t_1 = \frac{s_1}{v_1 + u} \quad \text{i} \quad t_2 = \frac{s_1}{v_1 - u},$$

pa ukupno vreme kretanja čamca, od polaska iz pristaništa do povratka u njega, iznosi:

$$T = t_1 + t_2 = s_1 \frac{2v_1}{v_1^2 - u^2}. \tag{1}$$

Pošto se splav kreće brzinom toka reke, čamac i splav su se sreli nakon vremena $t_3 = s_2/u$ od početka kretanja čamca. Ovo vreme je istovremeno jednako zbiru vremena kretanja čamca nizvodno i vremena kretanja čamca uzvodno do susreta, tj. dok ne pređe put jednak $s_1 - s_2$, pa je:

$$\frac{s_2}{u} = \frac{s_1}{v_\sim + u} + \frac{s_1 - s_2}{v_\sim - u}.$$

Iz ove jednačine se lako dobija

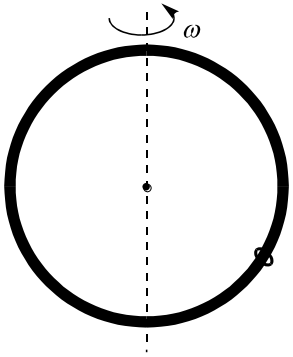
$$v_1 = u\left(\frac{2s_1}{s_2} - 1\right). \tag{2}$$

Eliminacijom v_1 iz jednačina (1) i (2), može se odrediti brzina reke, koja iznosi:

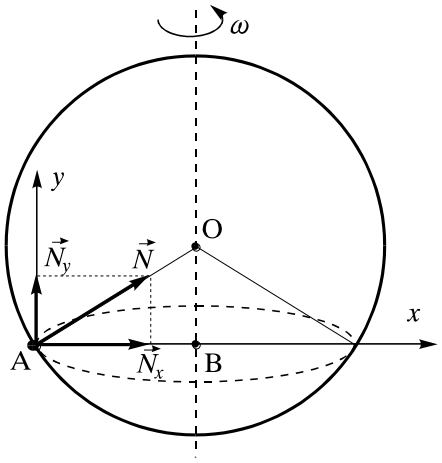
$$u = \frac{(2s_1 - s_2)s_2}{2(s_1 - s_2)}\frac{1}{T} = 3\frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Tražena brzina čamca u odnosu na obalu, kada plovi niz reku, prema jednačini (U10), jednaka je zbiru brzine čamca u odnosu na reku i brzine reke (pošto obe brzine imaju isti smer), i iznosi:

$$v = v_1 + u = u\left(\frac{2s_1}{s_2} - 1\right) + u = \frac{2s_1}{s_2}u = 10\frac{\text{km}}{\text{h}}.$$



8.93.RG. Po žici u obliku kružnice, poluprečnika R = 9.81 cm, koja rotira oko svog vertikalnog prečnika, može da klizi bez trenja mali prsten (vidi sliku).
a) Odrediti najveću ugaonu brzinu ω_0 pri kojoj prsten još uvek može da bude u ravnoteži samo na osi rotacije.
b) Ako je ugaona brzina rotacije ω_1 = 5 rad/s, onda je sila kojom prsten deluje na žicu u stanju ravnoteže $N_1 = 10^{-2}\,\mathrm{N}$. Odrediti pri kojoj ugaonoj brzini ω_2 ova sila iznosi $N_1 = 4\cdot 10^{-2}\,\mathrm{N}$.



Rešenje: Pretpostavimo da u slučaju kada je u ravnoteži izvan ose rotacije, prsten kruži po kružnici poluprečnika r (vidi sliku u rešenju zadatka). Na njega deluju sila Zemljine teže $m\vec{g}$ i normalna reakcija veze (žice) $\vec{N}$, pa se Drugi Njutnov zakon za njegovo kretanje može napisati u obliku:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}\,. \qquad (1)$$

Pošto prsten kruži, jedino ubrzanje koje poseduje je centripetalno, koje iznosi $r\omega^2$, pa se projekcija gornje jednačine na x - osu može napisati u obliku:

$$mr\omega^2 = N_x$$

Iz sličnosti trougla sile i trougla **OAV**, sledi:

$$\frac{N}{N_x} = \frac{R}{r}\,.$$

Iz poslednje dve jednačine se može odrediti normalna reakcija žice, koja iznosi:

$$N = N_x \frac{R}{r} = mR\omega^2\,.$$

Projekcija jednačine (1) na y - osu ima oblik $0 = -mg + N_y$, pa je $N_y = mg$. Kada je prsten na osi rotacije normalna reakcija veze je u ravnoteži sa silom Zemljine teže, odnosno $N = N_y = mg$.

a) Kada je prsten u ravnotežnom položaju izvan ose rotacije, tada je $N_x \neq 0$, pa je:

$$N = \sqrt{N_x^2 + N_y^2} > N_y = mg\,,$$

odnosno:

$$mR\omega^2 > mg\ .$$

Najveća ugaona brzina pri kojoj prsten može biti u ravnoteži samo na osi rotacije, prema ovoj nejednačini, jednaka je:

$$\omega_{\max} = \sqrt{\frac{g}{R}} \approx 10\frac{\text{rad}}{\text{s}}\ .$$

b) Kada žica rotira ugaonom brzinom ω_1 koja je, prema tekstu zadatka, manja od $\omega_{\max}$, prsten je u ravnoteži na osi rotacije, pa je

$$N_1 = mg\ \text{, odakle je}\quad m = \frac{N_1}{g}$$

Pošto je, prema tekstu zadatka,

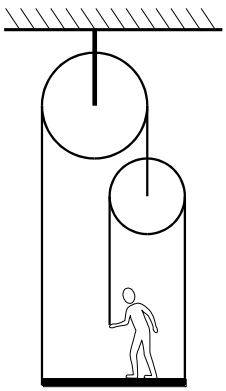
$$N_2 > N_1 = mg\ ,$$

to je u drugom slučaju ravnoteža prstena uspostavljena izvan ose rotacije, pa je

$$N_2 = mR\omega_2^2\ ,$$

a tražena ugaona brzina iznosi:

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{N_2}{mR}} = \sqrt{\frac{N_2}{N_1}\frac{g}{R}} \approx 20\frac{\text{rad}}{\text{s}}\ .$$

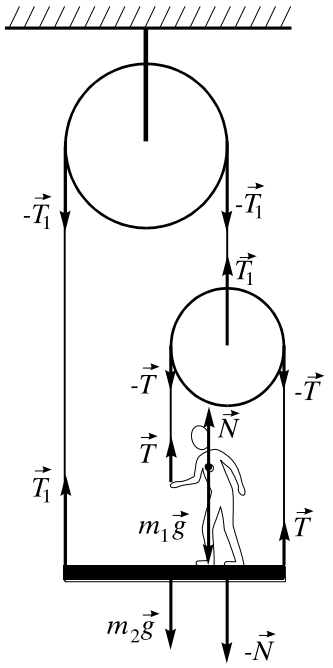


9.93.RG. Čovek mase m_1 = 60 kg stoji na dasci mase m_2 = 30 kg. Krajevi daske su vezani užadima, kao na slici. Odrediti silu, kojom čovek treba da vuče u vertikalnom pravcu kraj užeta koji drži, da bi centar mase sistema bio u ravnoteži. Masu koturova i užadi zanemariti. Pretpostaviti da čovek stoji na takvom mestu da je moguće uspostaviti ravnotežu sistema.

Rešenje: Da bi telo bilo u ravnoteži, moraju biti jednaki nuli zbir svih sila i zbir svih momenata sila koji na njega deluju (vidi jednačinu (U80). Momenti sila zavise od položaja njihovih napadnih tačaka. Tekstom zadatka ovi položaji nisu određeni. Odavde se može zaključiti da

poslednja rečenica u tekstu zadatka kazuje o ispunje-nosti uslova da zbir momenata sila koje deluju na posmatrana tela bude jednak nuli.

Prema postavci zadatka na tela u sistemu ne deluju sile po horizontali. Ravnoteža tela se ostvaruje kada se izjednači zbir intenziteta sila koje na njega deluju vertikalno naviše sa zbirom intenziteta sila koje na njega deluju vertikalno naniže. Ako normalnu reakciju podloge, tj. silu kojom daska deluje na čoveka označimo sa $\vec{N}$, tada čovek na dasku deluje, po Zakonu akcije i reakcije, silom $-\vec{N}$ istog intenziteta, a suprotnog smera.



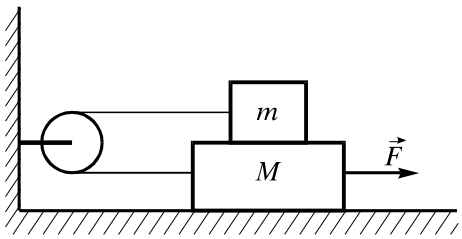
Označimo sile zatezanja u užadima kao na slici u rešenju. Pošto je masa koturova zanemarljiva, iz uslova ravnoteže nižeg kotura sledi da je $T_1 = 2T$, pa se uslovi ravnoteže za čoveka i dasku mogu napisati u obliku:

$$T + N = m_1 g\,,$$
$$T + T_1 = m_2 g + N\,.$$

Eliminacijom N i T iz ovih jednačina, može se odrediti sila zatezanja u užetu koje drži čovek, u ravnoteži, odnosno, tražena sila kojom čovek treba da vuče uže, koja iznosi:

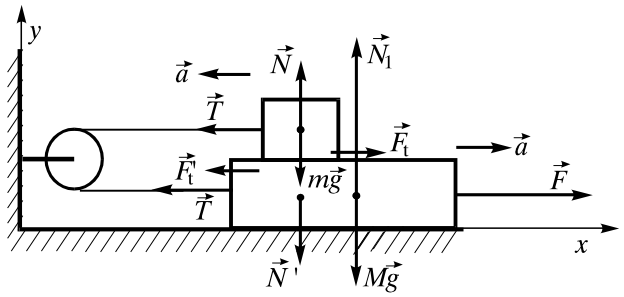
$$T = \frac{1}{4}(m_1 + m_2)g \approx 220\text{N}\,.$$

Napomena: Daju se i zadaci u kojima, pored sile kojom čovek treba da vuče uže, treba odrediti i mesto na kome čovek mora da stoji, da bi sistem bio u ravnoteži. Pri tome se u zadatku daju dimenzije daske. Za rešenje ovakvog zadatka treba iskoristiti i uslov ravnoteže momenata sile.



10.93.RG. Na horizontalnom stolu leži telo mase M = 2 kg, a na njemu drugo, manje telo, mase m = 1 kg. Tela su povezana neistegljivom niti, koja je prebačena preko kotura (vidi sliku). Mase niti i kotura su zanemarljive. Odrediti horizontalnu silu F, kojom treba delovati na donje telo da bi se ono udaljavalo od kotura konstantnim ubrzanjem $a=g/2$. Koeficijent trenja između tela iznosi μ = 0.5, a trenje između donjeg tela i stola može da se zanemari.

Rešenje: Pošto je nit neistegljiva, ubrzanja oba tela su istog intenziteta *a*, a suprotnog smera (vidi sliku u rešenju zadatka). Pošto je masa kotura zanemarljiva, intenzitet sile zatezanja je jednak u celoj niti. Na gornje telo deluju: sila zatezanja niti $\vec{T}$, sila trenja $\vec{F}_{\mathrm{t}}$, normalna reakcija veze $\vec{N}$ od donjeg tela i sila Zemljine teže $m\vec{g}$, pa se Drugi Njutnov zakon za njegovo kretanje može napisati u obliku:



$$m\vec{a} = \vec{T} + \vec{F}_{\mathrm{t}} + \vec{N} + m\vec{g},$$

a njegove projekcije na x i y osu u obliku:

$$-ma = -T + F_{\mathrm{t}} \qquad 0 = N - mg\,. \tag{1}$$

Pošto je iz poslednje jednačine $N = mg$, to je

$$F_{\mathrm{t}} = \mu N = \mu mg\,.$$

Na donje telo deluju: sila $\vec{F}$, sila zatezanja niti $\vec{T}$, sila trenja $\vec{F}_{\mathrm{t}}'$, normalna reakcija veze od gornjeg tela $\vec{N}'$, normalna reakcija veze podloge $\vec{N}_1$ i sila Zemljine teže $M\vec{g}$, pa se Drugi Njutnov zakon za njegovo kretanje može napisati u obliku:

$$M\vec{a} = \vec{F} + \vec{T} + \vec{F}_{\mathrm{t}}' + \vec{N}' + \vec{N}_1 + M\vec{g}$$

Projekcija ove jednačine na x - osu ima oblik:

$$Ma = F - T - F_{\mathrm{t}}'\,. \tag{2}$$

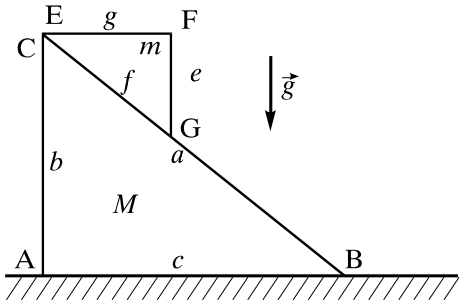
Po Zakonu akcije i reakcije sile trenja, kao sile međusobnog delovanja, imaju isti intenzitet, odnosno, $F_{\mathrm{t}}' = F_{\mathrm{t}} = \mu mg$. Ako se iskoristi uslov zadatka, da je $a = g/2$, jednačine (1) i (2) mogu biti napisane u obliku:

$$m\frac{g}{2} = T - \mu mg\,, \qquad M\frac{g}{2} = F - T - \mu mg\,.$$

Posle sabiranja poslednje dve jednačine, lako se može odrediti tražena sila, koja iznosi:

$$F = \frac{(m+M)g}{2} + 2\mu mg = \frac{1}{2}(M+3m)g \approx 24.5\text{N}.$$

Napomena: Da trenje između donjeg tela i podloge nije zanemarljivo, iz projekcije jednačine (2) na y - osu, mogli bismo odrediti reakciju veze podloge N_1, a time i silu trenja između donjeg tela i podloge $F_{t1} = \mu_1 N_1$, gde je μ_1 odgovarajući koeficijent trenja. Pri tome je, po Zakonu akcije i reakcije $N' = N = mg$.



11.93.RP. Klin **ABC**, mase M, može da klizi po horizontalnoj podlozi bez trenja. Po ovom klinu može da klizi manji klin **EFG** mase m. Odrediti pomeranje većeg klina kada manji sklizne iz položaja u kome se temena **C** i **E** poklapaju, kao na slici, u položaj u kome se temena **B** i **G** poklope. Dužine stranica klinova su a, b i c, odnosno, e, f i g.

Rešenje: U vertikalnom pravcu na sistem deluju spoljašnje sile, zbog kojih se centar mase sistema spušta. Na sistem u pravcu podloge ne deluju spoljašnje sile, dok unutrašnje sile (sile trenja, kao sile međusobnog delovanja klinova) ne mogu pomeriti centar mase sistema.

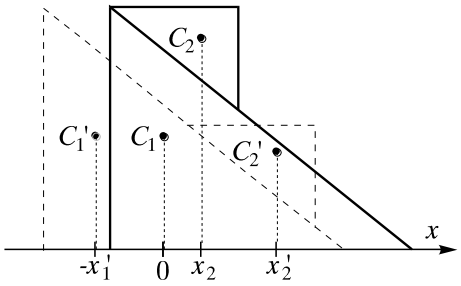
Postavimo x - osu horizontalno, sa koordinatnim početkom u centru mase većeg klina S_1 (vidi sliku u rešenju zadatka). Jednakost koordinata centra mase sistema pre i posle posmatranog kretanja, prema jednačini (U58), može se napisati u obliku:

$$\frac{M\cdot 0 + mx_2}{M+m} = \frac{-Mx_1' + mx_2'}{M+m},$$

odakle je

$$Mx_1' = m(x_2' - x_2),$$

gde je x_1' horizontalno pomeranje većeg klina ulevo. Horizontalno pomeranje manjeg klina udesno, u odnosu na veći klin, jednako je promeni x - koordinate centra mase S_2 manjeg klina ($x_2' - x_2$). Zbir ova dva pomeranja je jednak ukupnom relativnom pomeranju klinova $c - g$, odnosno:



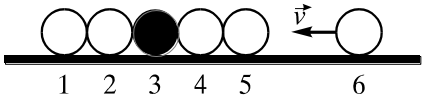
$$x_1' + (x_2' - x_2) = c - g \ .$$

Iz poslednje dve jednačine lako se može odrediti traženo pomeranje većeg klina, koje iznosi:

$$x_1' = \frac{m}{M+m}(c-g) \, .$$

Napomena 1. Treba primetiti da je na slici pretpostavljeno da su x - koordinate centra mase manjeg klina pozitivne. U zavisnosti od odnosa veličina klinova, nagibnog ugla i homogenosti gustine klinova, neka od ovih veličina može biti i negativna. Sve navedene jednačine važe i u tom slučaju.

Napomena 2. Zadatak je za nijansu teži od originalne verzije. Naime, u originalnoj verziji zadatka je rečeno da manji klin po većem klizi bez trenja. Zbog toga, za rešavanje ove verzije zadatka, nije bilo neophodno poznavanje činjenice da unutrašnje sile ne mogu pomeriti centar mase sistema.



12.93.RP. Pet kuglica jednakih prečnika raspoređeno je na horizontalnoj podlozi, kao na slici. Masa belih kuglica iznosi m a crne kuglice $2m$. Rastojanje kuglica je zanemarljivo u odnosu na njihov prečnik. U kuglicu 5 čeono udara kuglica 6 brzinom v. Objasniti kako će se kretati pojedinačne kuglice nakon sudara. Kuglice smatrati apsolutno elastičnim.

Rešenje: Posle apsolutno elastičnog sudara mirujuće kuglice mase m_1 i kuglice mase m_2, koja se kreće brzinom v, prema jednačini (U111), kuglice imaju brzine:

$$v_1 = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v \qquad \text{i} \qquad v_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} v\,, \tag{1}$$

respektivno. Očigledno, ako se sudaraju kuglice istih masa, tada je $v_1 = v$ i $v_2 = 0$, odnosno, kuglica koja se kretala staje, a kuglica koja je stajala nastavlja da se kreće njenom brzinom.

Proces sudaranja u opisanom problemu odvija se na sledeći način:
Pošto su mase kuglica 6 i 5 iste, nakon sudara kuglica 6 se zaustavlja, kuglica 5 nastavlja da se kreće brzinom *v*. Na isti način, nakon sudara kuglica 5 i 4, kuglica 5 se zaustavlja, a kuglica 4 nastavlja da se kreće brzinom *v*.

Ako primenimo jednačine (1) na sudar kuglice 4 sa kuglicom 3, dvostruko veće mase, mogu se odrediti njihove brzine posle sudara, koje iznose:

$$-\frac{1}{3}v \qquad \text{i} \qquad \frac{2}{3}v\,,$$

respektivno. Drugim rečima, prvom brzinom se kreće kuglica 4 (znak minus pokazuje da se kuglica odbija unazad), a drugom brzinom se kreće kuglica 3.

Istim rezonom kao u prva dva sudara, može se zaključiti da posle sudara kuglice 4 sa kuglicom 5 i kuglice 5 sa kuglicom 6, kuglice 4 i 5 ostaju da stoje, dok se kuglica 6 kreće brzinom $\frac{1}{3}v$ u smeru suprotnom od smera njenog kretanja na početku.

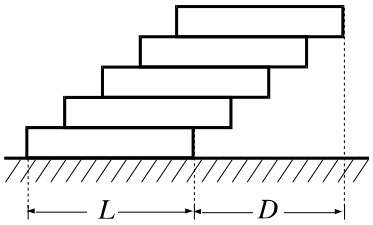
Ako primenimo jednačine (1) na sudar kuglice 3 sa kuglicom 2, dvostruko manje mase, mogu se odrediti njihove brzine posle sudara, koje iznose:

$$\frac{2}{9}v \qquad \text{i} \qquad \frac{8}{9}v\,,$$

respektivno. Drugim rečima, prvom brzinom se kreće kuglica 3, drugom kuglica 2, obe u istom smeru (ulevo).

Nakon sudara kuglice 2 sa kuglicom 1, iste mase, kuglica 1 odlazi ulevo brzinom $\frac{8}{9}v$, a kuglica 2 se zaustavlja. Na zaustavljenu kuglicu 2 ponovo naleće kuglica 3, dvostruko veće mase. Istim rezonom kao za prvi sudar ovih kuglica, može se zaključiti da kuglica 2 posle sudara odlazi u levo brzinom $\frac{8}{27}v$, a za njom kuglica 3 brzinom $\frac{2}{27}v$.

Prema tome, posle svih sudara, najvećom brzinom $\frac{8}{27}v$ se kreće kuglica 1 ulevo, za njom se kreću kuglica 2, brzinom $\frac{8}{27}v$, i kuglica 3, brzinom $\frac{2}{27}v$. Kuglice 4 i 5 ostaju da stoje, dok se kuglica 6 kreće udesno brzinom $\frac{1}{3}v$.

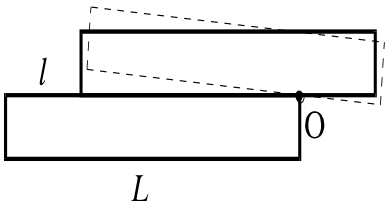


15.93.S. Jednake, glatke i homogene, pločice, pravougaonog preseka i dužine L, slažu se jedna na drugu, kao što je pokazano na slici. Naći maksimalno rastojanje D između prve i n-te pločice, pri kome je sistem još uvek u stanju ravnoteže, ako je svaka pločica smaknuta u odnosu na pločicu ispod sebe za istu dužinu. Uzeti u obzir da važi relacija:

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{(n+1)n}{2}.$$

Rešenje: Razmotrimo uslov prevrtanja u slučaju postojanja samo dve pločice. Pomerimo gornju pločicu u odnosu na donju za $l < L/2$ (vidi sliku u rešenju). Pošto su pločice homogene, mase delova pločice su srazmerne njihovim dužinama, pa mase gornje pločice levo i desno od tačke **O** iznose:

$$\frac{L-l}{l}mg \qquad \text{i} \qquad \frac{l}{L}mg\,.$$



Ako se gornja pločica zarotira za mali ugao oko tačke **O**, u ravnotežni položaj je vraća razlika momenata sile Zemljine teže koji deluju na deo pločice levo i deo pločice desno od tačke O, odnosno moment sile:

$$\frac{L-l}{L}mg\,\frac{L-l}{2}-\frac{l}{L}mg\,\frac{l}{2}=\left(\frac{L}{2}-l\right)mg$$

To znači da je sistem u stanju stabilne ravnoteže za $l < L/2$. Približavanjem l veličini $L/2$ veličina ovog momenta se smanjuje, da bi pri $l = L/2$ bio nula. Sistem u ovom položaju može ostati beskonačno, ali ako se gornja pločica izvede malo iz ravnoteže, dolazi do prevrtanja. To znači da je sistem u labilnoj ravnoteži. Ako je $l > L/2$, moment sile Zemljine teže dovodi do prevrtanja gornje pločice.

Ako je više pločica postavljeno jedna preko druge, do prevrtanja neće doći ako se centar mase svih pločica iznad najniže pločice nalazi iznad, ili na ivici, najniže pločice. Ako x - osu postavimo horizontalno, sa početkom u sredini najniže pločice, koordinate centara mase pločica iznad najniže (ako ih numerišemo počevši od prve iznad najniže) iznose:

$$x_1 = l\,, \qquad x_2 = 2l\,, \qquad \ldots \qquad x_n = (n-1)l\,.$$

Ako se iskoristi relacija data u tekstu zadatka, koordinata centra mase ovih pločica može biti napisana u obliku:

$$x_{\text{cm}} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{1}{n}\left(x_1 + x_2 + \ldots + x_n\right) =$$

$$= \frac{1}{n-1}\left[l + 2l + \ldots + (n-1)l\right] = \frac{l}{n-1}\left(1 + 2 + \ldots + n - 1\right) = = \frac{l}{n-1}\frac{n(n-1)}{2} = \frac{n}{2}l$$

Do prevrtanja neće doći ako je $x_{\text{cm}} \le L/2$, s tim da znaku jednakosti odgovara kritičan položaj labilne ravnoteže. Ako ovu nejednakost iskoristimo, može se dobiti:

$$\frac{n}{2}l \le \frac{L}{2},$$

Prema tome, broj pločica, koje se mogu složiti na opisani način, iznosi:

$$n = \frac{L}{l}.$$

Naravno, ako L/l nije ceo broj, onda je n ceo deo od L/l, odnosno, najveći ceo broj manji od vrednosti pomenutog izraza, označimo taj broj sa n'.

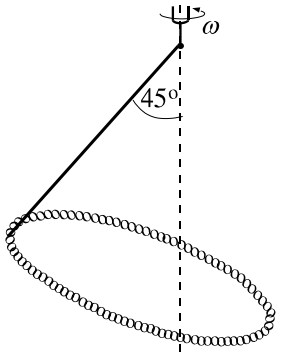
Maksimalno rastojanje između prve i poslednje pločice, pri kome je sistem još uvek u stanju ravnoteže, iznosi:

$$D = (n' - 1)l,$$

a ako je L/l ceo broj, onda se može napisati u obliku:

$$D = (n-1)l = \frac{n-1}{n}L.$$

Napomena: Originalan tekst zadatka nije sasvim precizan, pa dozvoljava mogućnost različitog smicanja pojedinih pločica, što znatno otežava rešavanje problema. Originalno rešenje ipak ne obuhvata ovaj slučaj, ali ne diskutuje ni rešenje u funkciji celobrojnosti odnosa L/l.



19.93.S. Metalni lančić **A**, mase m, vezan za kraj osovine centrifugalne mašine, rotira konstantnom ugaonom brzinom ω, pri čemu nit na kojoj visi zaklapa sa vertikalom ugao α = 45° (vidi sliku). Zanemarujući masu i istegljivost niti, odrediti rastojanje između centra mase lanca i vertikalne ose oko koje lanac rotira.

Rešenje: Na lančić deluju sila Zemljine teže $m\vec{g}$ i sila zatezanja niti $\vec{T}$, pa se Drugi Njutnov zakon za kretanje centra mase (CM) lančića može napisati u obliku:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T},$$

a njegove projekcije na x i y - ose (vidi sliku u rešenju) u obliku:

$$ma_x = T_x = \frac{\sqrt{2}}{2}T \qquad \text{i} \qquad ma_y = T_y - mg = \frac{\sqrt{2}}{2}T - mg\ .$$

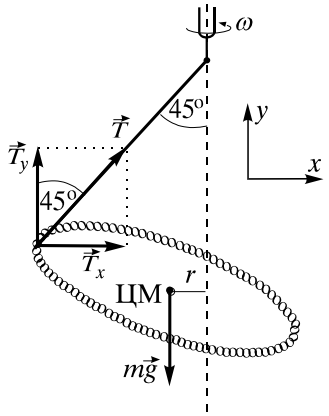
Pošto se centar mase lančića ne kreće po vertikali, to je $a_y = 0$, a pošto kruži oko ose rotacije, ubrzanje u pravcu x - ose je centripetalno, odnosno:

$$a_x = a_{\text{cp}} = r\omega^2,$$

pa se gornje jednačine mogu napisati u obliku:

$$mr\omega^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}T \quad \text{i}$$

$$0 = \frac{\sqrt{2}}{2}T - mg\ .$$

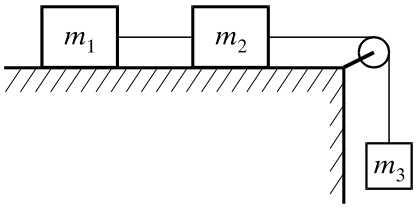


Eliminacijom sile zatezanja iz poslednjih jednačina, može se odrediti tražena udaljenost centra mase od ose rotacije, koja iznosi:

$$r = \frac{g}{\omega^2}$$

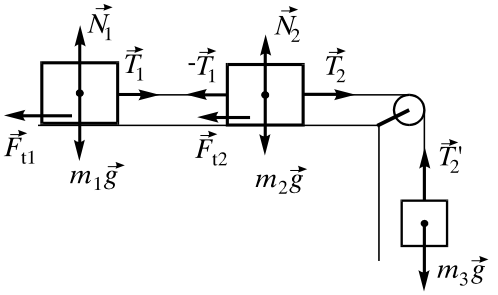
Napomena: Očigledno, traženo rastojanje ne zavisi od mase lančića. Često se u zadacima traži i određivanje sile zatezanja u niti, koja zavisi od ove mase. Ona se lako određuje iz gornjih jednačina, i iznosi:

$$T = \sqrt{2}mg \ .$$



4.94.O. Na horizontalnu površinu su postavljena dva tela čije su mase m_1 = 100 g i m_2 = 200 g. Treće telo, mase m_3 = 500 g, visi na niti prebačenoj preko kotura zanemarljive mase (vidi sliku). Tela su međusobno povezana neistegljivom niti zanemarljive mase. Koeficijent trenja između prvog tela i podloge iznosi μ_1 = 0.5, a između drugog tela i podloge iznosi μ_2 = 0.4. Odrediti intenzitet ubrzanja sistema i sile zatezanja u nitima.

Rešenje: Pošto je nit neistegljiva, sva tela se kreću ubrzanjem istog intenziteta, označimo ga sa *a*. Na prvo i drugo telo deluju sile trenja $\mu_1 m_1 g$ i $\mu_2 m_2 g$, respektivno (vidi rešenje zadatka **1.91.RG)** i odgovarajuće sile zatezanja niti (vidi sliku u rešenju). Pošto je po Zakonu akcije i reakcije $T_2' = T_2$, projekcije jednačina za Drugi Njutnov zakon, na pravce kretanja, mogu se, za sva tri tela, napisati u obliku:



$$m_1 a = T_1 - \mu_1 m_1 g \ ,$$

$$m_2 a = T_2 - T_1 - \mu_2 m_2 g \quad \text{i}$$

$$m_3 a = m_3 g - T_2 \ ,$$

gde su T_1 i T_2 sile zatezanja u nitima. Sabiranjem gornjih jednačina može se odrediti ubrzanje tela:

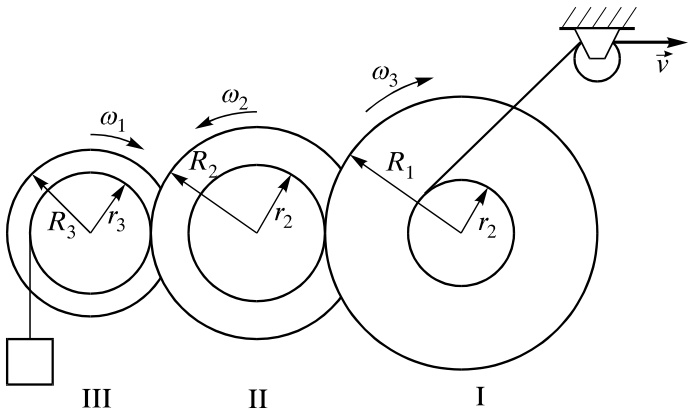
$$a = \frac{m_3 - \mu_1 m_1 - \mu_2 m_2}{m_1 + m_2 + m_3} g = 4.54 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \ .$$

Iz gornjih jednačina mogu se odrediti i sile zatezanja u nitima, koje iznose:

$$T_1 = m_1(a + \mu_1 g) = \frac{m_2(\mu_1 - \mu_2) + m_3(\mu_1 + 1)}{m_1 + m_2 + m_3} m_1 g \approx 0.94\text{N} \quad \text{i}$$

$$T_2 = m_3(g - a) = \frac{m_1(1 + \mu_1) + m_2(\mu_2 + 1)}{m_1 + m_2 + m_3} m_3 g \approx 0.98\text{N} .$$

7.94.RG. Sistem od tri zupčanika, čiji su poluprečnici R_1 = 15 cm i R_2 = R_3 = 10 cm, ima osovine poluprečnika r_1 = r_2 = 5 cm i r_3 = 8 cm (vidi sliku). Osovine drugog i trećeg zupčanika su takođe nazubljene. Prenos sa prvog na treći zupčanik se ostvaruje na sledeći način: zupci prvog zupčanika pokreću zupce na osovini drugog zupčanika, a zupci na njegovom obodu pokreću zupce na osovini trećeg zupčanika. Na osovinu prvog zupčanika je namotano uže koje se vuče brzinom v = 1 m/s, a na obod trećeg zupčanika je namotano uže na koje je obešen teg. Izračunati brzinu podizanja tega ako se zanemari veličina zubaca zupčanika i proklizavanje između njih.



Rešenje: Linijska brzina tačaka po obodu osovine prvog zupčanika je jednaka brzini vučenja kanapa. Ugaona brzina rotacije prvog zupčanika i linijske brzine tačaka po njegovom obodu iznose:

$$\omega_1 = \frac{v}{r_1} \qquad \text{i} \qquad v_1 = \omega_1 R_1 = \frac{v R_1}{r_1} .$$

Pošto nema proklizavanja, poslednja brzina je jednaka linijskoj brzini perifernih tačaka osovine drugog zupčanika. Ugaona brzina rotacije ovog zupčanika i linijske brzine tačaka po njegovom obodu iznose:

$$\omega_2 = \frac{v_1}{r_2} = \frac{vR_1}{r_1 r_2}$$

$$v_2 = \omega_2 R_2 = \frac{vR_1 R_2}{r_1 r_2}\,.$$

Na sličan način se može odrediti i ugaona brzina rotacije trećeg zupčanika, koja iznosi:

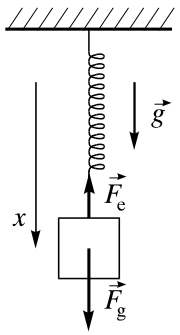
$$\omega_3 = \frac{v_2}{r_3} = \frac{vR_1 R_2}{r_1 r_2 r_3}\,.$$

Linijska brzina tačaka po obodu trećeg zupčanika, koja je istovremeno jednaka traženoj brzini podizanja tega, iznosi:

$$v_3 = \omega_3 R_3 = \frac{vR_1 R_2 R_3}{r_1 r_2 r_3} = 7.5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,.$$

9.94.RG. Odrediti gustinu planete ako je na njenom Ekvatoru istezanje opruge dinamometra 10% manje nego na polovima i ako dan na toj planeti traje T = 6 h. Zanemariti razliku između poluprečnika planete na polu i Ekvatoru.

Rešenje: Posmatrajmo pojavu iz inercijalnog sistema. Na telo obešeno na oprugu deluju gravitaciona sila $\vec{F}_\mathrm{g}$ i sila elastičnosti opruge $\vec{F}_\mathrm{e}$ (vidi sliku), pa se Drugi Njutnov zakon za kretanje tela mase m može napisati u obliku:



$$m\vec{a} = \vec{F}_\mathrm{g} + \vec{F}_\mathrm{e}\,. \qquad (1)$$

Tela na Ekvatoru kruže po kružnici poluprečnika jednakog poluprečniku planete R, pa imaju centripetalno ubrzanje $R\omega^2$ usmereno ka centru planete. Ako usmerimo x - osu ka centru planete i ako iskoristimo Njutnov zakon gravitacije, projekcija ove jednačine na x - osu može se pisati u obliku:

$$mR\omega^2 = mR\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \gamma\frac{mM}{R^2} - F_{\mathrm{e,ekv}},$$

gde je M masa planete.

Telo, obešeno o dinamometar na polu, miruje, pa se projekcija jednačine (1) na x - osu može pisati u obliku:

$$0 = \gamma\frac{mM}{R^2} - F_{\mathrm{e,pol}}.$$

Elastična sila opruge je srazmerna po intenzitetu promeni dužine (istezanju) opruge Δl, pa se, posle izražavanja elastičnih sila iz prethodnih jednačina, može pisati:

$$F_{\mathrm{e,ekv}} = k\Delta l_{\mathrm{ekv}} = \gamma\frac{mM}{R^2} - mR\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$

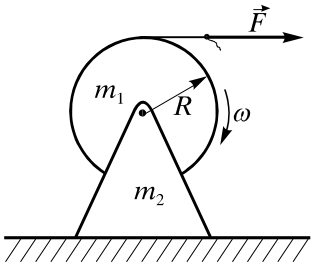
$$F_{\mathrm{e,pol}} = k\Delta l_{\mathrm{pol}} = \gamma\frac{mM}{R^2},$$

gde je k krutost opruge. Pošto je odnos istezanja opruga, prema uslovu zadatka, $\Delta l_{\mathrm{ekv}} = 0.9\Delta l_{\mathrm{pol}}$, posle deljenja poslednje dve jednačine, može se dobiti:

$$\frac{\Delta l_{\mathrm{ekv}}}{\Delta l_{\mathrm{pol}}} = 1 - \frac{R^3}{\gamma M}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = 0.9.$$

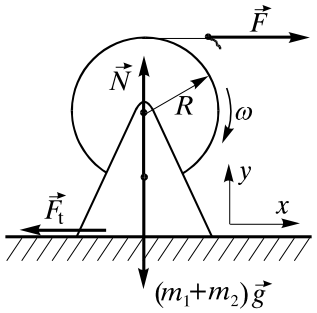
Tražena gustina planete, može se odrediti iz poslednje jednačine i iznosi:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{3M}{4R^3\pi} = \frac{3\pi}{0.1\gamma\ \ T^2} \approx 3.03\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}.$$



10.94.RG. Homogen valjak, mase m_1 = 1 kg i poluprečnika R = 30 cm, može slobodno da rotira oko horizontalne ose rotacione simetrije, zahvaljujući osovini koja je pričvršćena na postolje mase m_2 = 2 kg (vidi sliku). Na cilindar je namotano neistegljivo uže, zategnuto silom F = 15 N, u horizontalnom pravcu. Koeficijent trenja između postolja i podloge je μ = 0.4. Odrediti ugaono ubrzanje cilindra i ubrzanje užeta, ako se mase užeta i osovine mogu zanemariti.

Rešenje: Na sistem cilindarpostolje deluju sila $\vec{F}$, sila trenja $\vec{F}_{\text{t}}$, sila Zemljine teže $(m_1+m_2)\vec{g}$ i reakcija podloge $\vec{N}$ (vidi sliku u rešenju), pa se Drugi Njutnov zakon, za kretanje centra mase sistema, može napisati u obliku:



$$(m_1+m_2)\vec{a}=\vec{F}+\vec{F}_{\text{t}}+(m_1+m_2)\vec{g}+\vec{N}\,.$$

Projekcije ove jednačine na x i y osu mogu se napisati u obliku:

$$(m_1+m_2)a=F-F_{\text{t}} \qquad 0=-(m_1+m_2)g+N\,.$$

Ako se zna da je $F_{\text{t}}=\mu N$, iz poslednje dve jednačine lako se može odrediti ubrzanje celog sistema u odnosu na podlogu, koje iznosi:

$$a=\frac{F}{m_1+m_2}-\mu g \tag{1}$$

Cilindar rotira moment sile $\vec{F}$, pa se Osnovni zakon dinamike rotacije za cilindar može napisati u obliku:

$$I\alpha=\frac{1}{2}m_1R^2\alpha=FR\,,$$

gde je α ugaono ubrzanje cilindra, koje iznosi:

$$\alpha=\frac{2F}{m_1R}=\frac{20}{3}\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}\ .$$

Ubrzanje užeta u odnosu na osu rotacije, odnosno u odnosu na postolje, jednako je tangencijalnom ubrzanju perifernih tačaka diska, koje iznosi $R\alpha$. Ubrzanje užeta u odnosu na podlogu je jednako zbiru ubrzanja postolja i ubrzanja užeta u odnosu na postolje, pa je:

$$a_{\text{u}}=a+R\alpha=\frac{F}{m_1+m_2}-\mu g+\frac{2F}{m_1}\approx 2.1\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\,.$$

Napomena: Originalno rešenje je pogrešno, jer je pretpostavljen pogrešan smer sile trenja. U originalnom zadatku je data sila od 1 N, koja nije dovoljna za translatorno pokretanje sistema kao celine.

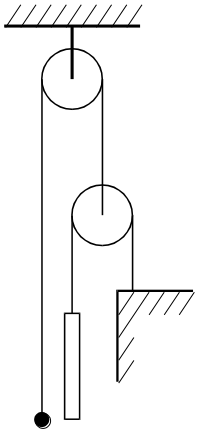
Iz jednačine (1) se vidi da je za translatorno pokretanje sistema ($\alpha > 0$) neophodno da sila kojom se vuče konopac bude

$$F > \mu \quad g(m_1 + m_2)\,.$$

Ako to nije slučaj, valjak rotira oko nepokretne ose, odnosno, postolje ostaje nepokretno. Ubrzanje užeta je tada jednako tangencijalnom ubrzanju perifernih tačaka diska $R\alpha$, odnosno:

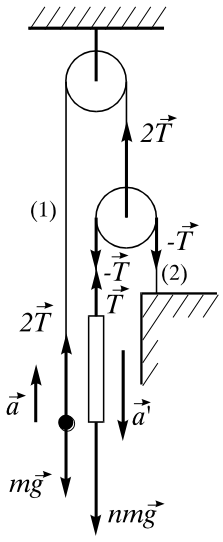
$$a' = R\alpha = \frac{2F}{m_1} = 2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,.$$

Pošto u originalnom tekstu zadatka nije zadovoljena navedena nejednakost, ovo je tačno rešenje originalnog zadatka u opštim brojevima.



11.94.RP. U sistemu prikazanom na slici masa kuglice je n = 2 puta manja od mase štapa, čija je dužina l = 1.5 m. U početnom trenutku se kuglica nalazila naspram donjeg kraja štapa. Posle koliko vremena će se kuglica naći naspram gornjeg kraja štapa? Zanemariti mase koturova i niti, istegljivost niti i trenja u sistemu.

Rešenje: Pošto je masa koturova zanemarljiva, sila zatezanja u niti 1 je dvostruko veća od sile zatezanja u niti 2, koju ćemo označiti sa $\vec{T}$ (vidi sliku u rešenju zadatka). Pošto na štap i kuglicu deluju stalne sile, oba tela se kreću sa konstantnim ubrzanjem. Iz geometrije problema je očigledno da pri kretanju štap prelazi dvostruko duži put od kuglice. Iz jednačine (U26) može se zaključiti da je zbog toga ubrzanje štapa $\vec{a}'$ dvostruko veće od ubrzanja kuglice $\vec{a}$ ($a' = 2a$).



Na kuglicu deluju sila zatezanja niti $2\vec{T}$ i sila Zemljine teže $m\vec{g}$. Ako pretpostavimo da je ubrzanje kuglica usmereno naviše, Drugi Njutnov zakon za njeno kretanje može se napisati u obliku:

$$ma = 2T - mg\,.$$

Na štap n puta veće mase deluju sila Zemljine teže $nm\vec{g}$ i dvostruko manja sila zatezanja $\vec{T}$. Ubrzanje štapa ima suprotan smer od ubrzanja kuglice, pa se Drugi Njutnov zakon za njegovo kretanje može napisati u obliku:

$$2nma = nmg - T\,.$$

Eliminacijom sile zatezanja, iz ove dve jednačine se može odrediti ubrzanje kuglice:

$$a = \frac{2n-1}{4n+1} g\,.$$

Kuglica će proći pored drugog kraja štapa kada je zbir njenog pređenog puta s i pređenog puta štapa $2s$, jednak dužini štapa, odnosno kada je $3s = l$. Pređeni put kuglice, kao put kod ravnomerno ubrzanog kretanja, iznosi:

$$s = \frac{1}{3} l = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} \frac{2n-1}{4n+1} g t^2\,,$$

pa je traženo vreme:

$$t = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{4n+1}{2n-1} \frac{l}{g}} \approx 0.55\text{s}\,.$$

14.94.RG. Dva horizontalna diska slobodno rotiraju oko vertikalne nepokretne ose koja prolazi kroz njihove centre. Momenti inercije diskova u odnosu na osu rotacije su I_1= 0,01 kgm^2 i I_2= 0,02 kgm^2, a ugaone brzine ω_1= 2 rad/s i ω_2 = 1 rad/s. Gornji disk se polako spušta i dotiče donji. Zahvaljujući trenju među njima, posle nekog vremena oni nastavljaju da rotiraju kao jedna celina. Odrediti rad koji pri tom izvrši sila trenja. Koeficijent trenja između diskova je μ = 0.6.

Rešenje: Pošto diskovi slobodno rotiraju, na njih ne deluju spo-ljašnje sile, pa važi Zakon održanja momenta impulsa celog sistema, koji se može napisati u obliku:

$$I_1\omega_1 + I_2\omega_2 = (I_1 + I_2)\omega\,,$$

gde je ω ugaona brzina spojenih diskova. Na diskovima, pojedinačno, rad vrše sile trenja, kao spoljašnje sile. Ukupan rad sila trenja je jednak zbiru radova nad oba diska. Prema jednačini (U95) može se pisati:

$$A = A_1 + A_2 = \Delta E_1 + \Delta E_2 = (E_1' - E_1) + (E_2' - E_2) = (E_1' + E_2') - (E_1 + E_2)$$

gde su sa prim označene energije diskova posle, a bez prima pre spajanja.

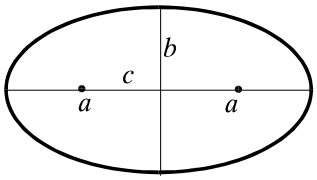
Pošto je promena visine diskova pri spajanju zanemarljiva, menja se samo njihova kinetička energija, pa se traženi rad može napisati u obliku:

$$A = (E'_{k1} + E'_{k2}) - (E_{k1} + E_{k2}) = \frac{1}{2}(I_1 + I_2)\omega^2 - \left(\frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2\right) =$$

$$= -I_1 I_2 \frac{(\omega_1 - \omega_2)^2}{2(I_1 + I_2)} \approx -3.3 \cdot 10^{-3} \text{J} .$$

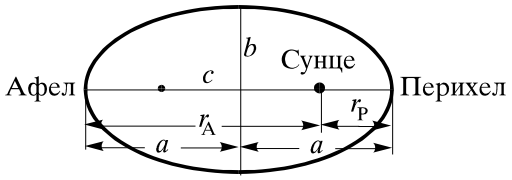
Napomena 1: Očigledno, rad sile trenja ne zavisi od, u tekstu zadatka datog, koeficijenta trenja.

Napomena 2: Po Zakonu akcije i reakcije, obe sile trenja, kao sile međusobnog delovanja diskova, imaju isti intenzitet. Pošto su i putevi na kojima one deluju jednaki, zbog istog intenziteta relativnih pomeranja, radovi ovih sila su takođe jednaki.



18.94.S. Halejeva kometa kruži oko Sunca po elipsi u čijoj se jednoj žiži nalazi Sunce. Poslednji put je prošla pored Sunca (kroz perihel) 1986.g. Prilikom pretposlednjeg prolaska ove komete kroz perihel 1910.g., izmereno je njeno rastojanje od Sunca, koje je iznosilo 0.6 A.J. Odrediti najveću udaljenost komete od Sunca. Parametri koji karakterišu elipsu, velika i mala poluosa (a i b) prikazani su na slici. 1 A.J. = 1 astronomska jedinica = veličina velike poluose Zemljine orbite oko Sunca = $150 \cdot 10^6 \text{km}$).

Rešenje: Iz teksta zadatka se vidi da period obilaska komete oko Sunca iznosi $T = 76\,\text{god}.$, a udaljenost perihela od Sunca $r_\text{P} = 0.6\text{A.J}$ Primenimo III Keplerov zakon na kretanje komete i Zemlje. Ako su a_Z i a velike poluose, a T_Z i T periodi rotacije Zemlje i komete oko Sunca, prema jednačini (U121) može se pisati:



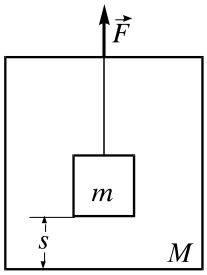
$$a = a_\text{Z} \sqrt[3]{\left(\frac{T}{T_\text{Z}}\right)^2} \approx 17.9\text{A.J.}$$

Iz geometrijskih odnosa sa slike u rešenju sledi:

$$r_\text{A} = a + c \qquad\qquad r_\text{P} = a - c\,,$$

pa je tražena najveća udaljenost komete od Sunca (udaljenost u trenutku kada je kometa u afelu):

$$r_{\mathrm{A}} = 2a - r_P \approx 35.2\text{A.J.}$$



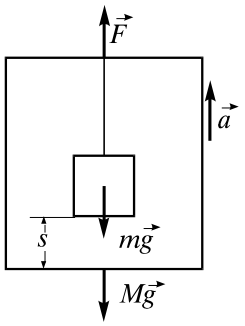
3.95.O. Na plafon lifta, mase M, okačen je teg, mase m, pomoću neistegljive niti, zanemarljive mase, tako da je rastojanje tega od poda lifta s (vidi sliku). Odrediti ubrzanje lifta, ako se on kreće naviše zbog delovanja sile F. Kolika su ubrzanja lifta i tega odmah posle prekidanja niti na kojoj visi teg? Posle koliko vremena, nakon pucanja niti, teg pada na pod lifta?

Rešenje: Drugi Njutnov zakon za kretanje sistema liftteg, pre pucanja niti, može se napisati u obliku (vidi prvu sliku u rešenju):

$$(M+m)a = F - (M+m)g\,,$$

pa ubrzanje sistema tada iznosi:

$$a = \frac{F}{M+m} - g\,.$$

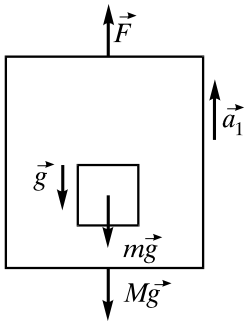


Posle pucanja niti, teg slobodno pada ubrzanjem Zemljine teže $\vec{g}$ (u odnosu na zemlju). Drugi Njutnov zakon za kretanje lifta, posle pucanja niti, može se napisati u obliku (vidi drugu sliku u rešenju):

$$Ma_1 = F - Mg\,,$$

pa mu ubrzanje, u odnosu na zemlju, iznosi:

$$a_1 = \frac{F}{M} - g\,.$$

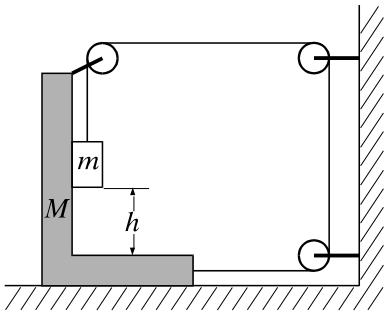


Pošto lift i teg imaju suprotno usmerena ubrzanja, ubrzanje tega u odnosu na lift jednako je zbiru ubrzanja tega i lifta u odnosu na zemlju, odnosno:

$$a_2 = a_1 + g = \frac{F}{M}\,.$$

Ovim ubrzanjem teg prelazi put s do pada na pod lifta, za šta mu je, prema jednačini (U26), potrebno vreme:

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a_2}} = \sqrt{\frac{2sM}{F}} .$$



4.95.O. U sistemu prikazanom na slici, teg mase m = 150 g se nalazi na visini h = 1.2 m od donjeg dela rama mase M = 1650 g. Odrediti vreme posle koga će se teg spustiti na donji deo rama, ako su sva trenja, mase koturova i niti, kao i istegljivost niti zanemarivi. Kada sistem miruje, teg dodiruje vertikalni deo rama.

Rešenje: Na sistem ram-teg kao celinu u horizontalnom pravcu deluju samo dve sile zatezanja niti $\vec{T}$, kao spoljašnje sile (vidi sliku u rešenju), pa se Drugi Njutnov zakon za njegovo kretanje u pravcu x - ose može napisati u obliku:

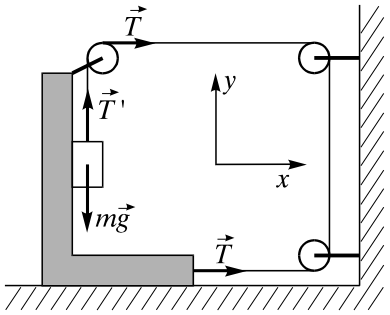
$$(M+m)a = 2T . \qquad (1)$$

U vertikalnom pravcu na teg deluju sila zatezanja niti $\vec{T}'$ i sila Zemljine teže $m\vec{g}$. Pošto je masa niti i koturova zanemarljiva, intenzitet sila zatezanja niti je isti u celoj niti, odnosno, $T' = T$. Drugi Njutnov zakon, za kretanje tega u pravcu y - ose, može se napisati u obliku:

$$ma_1 = T - mg .$$

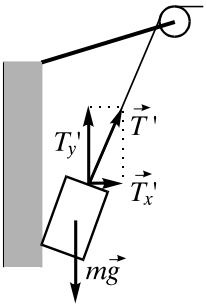
Iz geometrijskih odnosa u sistemu je očigledno da pomeranju sistema udesno, odgovara dvostruko veće spuštanje tega. Drugim rečima, ubrzanje tega duž y - ose a_1 je dvostruko veće od ubrzanja sistema duž x - ose a, odnosno, važi odnos $a_1 = 2a$. Eliminacijom sile zatezanja niti iz prve dve jednačine i korišćenjem poslednjeg odnosa, može se odrediti ubrzanje kojim teg prelazi ras-tojanje h, koje iznosi:

$$a_1 = \frac{4mg}{(M+5m)} .$$



Traženo vreme ravnomerno ubrzanog spuštanja tega, bez početne brzine, prema jednačini (U26), iznosi:

$$t = \sqrt{\frac{2d}{a_1}} = \sqrt{\frac{M+5m}{2m}\frac{d}{g}} \approx 0.98\text{s}\,.$$

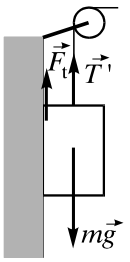


Napomena: U originalnom zadatku slika nije sasvim precizno nacrtana. Teg nije priljubljen uz vertikalni deo rama, a isto nije naglašeno ni u tekstu. Razmotrićemo kakve bi posledice po kretanje imala odmaknutost tega od rama. U ovom slučaju, zbog ubrzanog kretanja sistema, nit o kojoj visi teg neće stajati vertikalno (vidi prvu sliku uz napomenu). Ugao pod kojim će se nit postaviti je takav da komponenta sile zatezanja u pravcu x - ose saopštava tegu ubrzanje sistema duž te ose, odnosno, $a_{1x} = a$, pa je po Drugom Njutnovom zakonu:

$$T_x = ma\,.$$

Istovremeno, ubrzanje tega duž y - ose zavisi od komponente sile zatezanja u tom pravcu T_y' i sile Zemljine teže mg, pa je po Drugom Njutnovom zakonu:

$$ma_{1y} = mg - T_y'\,.$$



Uz to je

$$T' = \sqrt{T_x'^2 + T_y'^2} \qquad \text{i} \qquad a_1 = \sqrt{a^2 + a_{1y}^2}\,.$$

Kombinovanjem ovih jednačina sa jednačinom (1), može se odrediti ugao koji nit, na kojoj visi teg, zaklapa sa vertikalom, i druge veličine koje opisuju kretanje ovakvog sistema. Naravno, i uslov pod kojim bi se teg priljubio uz vertikalni deo rama.

Ako je teg priljubljen uz vertikalni deo rama, reakcija veze rama $\vec{N}$ (vidi drugu sliku uz napomenu) saopštava tegu ubrzanje a. Pošto su trenja zanemarljiva ($\vec{F}_t = \mu N \approx 0$), ova reakcija ne utiče na kretanje tega duž y - ose, pa važi predstavljeno rešenje zadatka.

5.95.O. Po horizontalnoj ravni rotira mala lopta mase *m*, ugaonom brzinom ω pričvršćena za kraj gumenog creva. Odrediti radijus kružnice po kojoj se lopta kreće, kao i silu zatezanja creva, ako je trenje između lopte i podloge zanemarljivo. Dužina neistegnutog creva iznosi l_0. Sila zatezanja u crevu se uvećava proporcionalno njegovom istezanju: sila f_0 uvećava dužinu creva za 1 cm. Masu creva zanemariti.

Rešenje: Veličina f_0 ima smisao sile koja dovodi do jediničnog istezanja creva, odnosno, $f_0 = F/l$, pa sila koja dovodi do istezanja creva za l_1 iznosi $F_1 = f_0 l_1$. Po Zakonu akcije i reakcije, istezanje creva za l_1 proizvodi u crevu silu zatezanja istog intenziteta. Ako se pri rotaciji crevo istegne za l_1, poluprečnik kružnice po kojoj kruži lopta iznosi $R = l_0 + l_1$. Rotaciju kugle vrši sila zatezanja creva, kao centripetalna sila, pa je:

$$mr\omega^2 = m(l_0 + l_1)\omega^2 = f_0 l_1 .$$

Odavde se može odrediti izduženje creva, koje iznosi:

$$l_1 = \frac{ml_0\omega^2}{f_0 - m\omega^2} .$$

Traženi poluprečnik kružnice po kojoj se kreće kugla iznosi:

$$R = l_0 + l_1 = \frac{l_0 f_0}{f_0 - m\omega^2} ,$$

a sila zatezanja creva:

$$F = f_0 l_1 = \frac{ml_0 f_0\omega^2}{f_0 - m\omega^2} .$$

Napomena 1: Nekim takmičarima je smetalo "mešanje" konkretnog izduženja od 1 cm sa opštim brojevima u tekstu zadatka. To ne bi smelo da dovede do zabune, jer takmičari treba da prepoznaju iz teksta smisao veličine f_0. Međutim, treba voditi računa o jedinicama u gornjim izrazima, jer je f_0 očigledno u $\mathrm{N/cm}$.

Napomena 2: U originalnom tekstu zadatka nije precizirano da kugla i crevo rotiraju u istoj ravni. To je neke od takmičara navelo na pomisao da kugla rotira u horizontalnoj ravni tako što crevo rotira zaklapajući određeni ugao sa vertikalom. Naravno, moguć je i takav problem, ali bi za njegovo rešavanje bilo potrebno poznavanje još nekih veličina, naprimer, upravo pomenutog ugla.

6.95.RG. Pošavši iz mirovanja, automobil se po pravolinijskom putu jedno vreme kreće konstantnim ubrzanjem od $a_1 = 5\ \mathrm{m/s^2}$, zatim se neko vreme kreće ravnomerno, a potom do zaustavljanja konstantnim usporenjem od $a_2 = 5\ \mathrm{m/s^2}$. Poznato je da je ukupno vreme kretanja $t = 25$ s, kao i da je srednja brzina automobila $v = 72$ km/h.
a) Koliko se vremena automobil kretao ravnomerno?
b) Prikazati grafički zavisnost ubrzanja, brzine i pređenog puta od vremena.

Rešenje: Ukupan put automobila može se odrediti iz srednje brzine:

$$s = v_{sr} t\ .$$

Označimo sa s_1, s_2 i s_3 delove puta na kojima se automobil kreće ubrzano, ravnomerno i usporeno, a sa t_1, t_2, i t_3 odgovarajuća vremena. Sa a označimo ubrzanje na prvom, odnosno usporenje na trećem delu puta. Za ravnomerno ubrzano kretanje na prvom delu puta, prema jednačinama (U26), može se pisati:

$$s_1 = \frac{1}{2} a t_1^2 \qquad \text{i} \qquad v_1 = a t_1\ ,$$

gde je v_1 brzina na kraju prvog dela puta. To je i brzina ravnomernog kretanja na drugom delu puta, koji iznosi:

$$s_2 = v_1 t_2 = a t_1 t_2\ .$$

Istovremeno je to i početna brzina ravnomerno usporenog kretanja na trećem delu puta. Pošto se telo na kraju zaustavlja, za ovaj deo puta se može pisati:

$$s_3 = v_1 t_3 - \frac{1}{2} a t_3^2$$

$$v_3 = v_1 - a t_3 = 0 ,$$

Iz poslednje jednačine sledi

$$a t_3 = v_1 = a t_1 ,$$

$$t_3 = t_1 , \qquad (1)$$

pa je:

$$t = t_1 + t_2 + t_3 = 2t_1 + t_2 ,$$

$$t_1 = \frac{t - t_2}{2} . \qquad (2)$$

Ukupan pređeni put automobila iznosi:

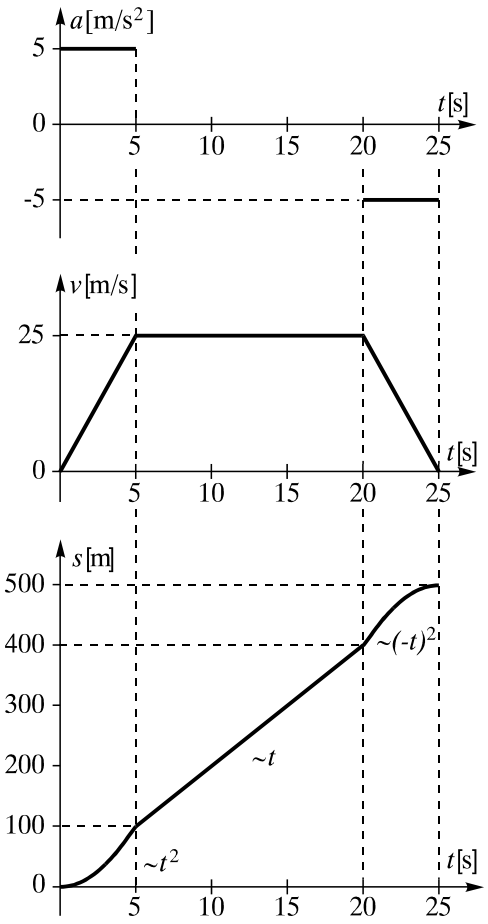
$$s = v_{sr}\, t = s_1 + s_2 + s_3 .$$

$$s = \frac{1}{2} a t_1^2 + a t_1 t + \frac{1}{2} a t_1^2 = a t_1^2 + a t_1 t_2$$

Eliminacijom t_1 dobija se kvadratna jednačina

$$t_2^2 = t^2 - \frac{4 v_{sr} t}{a} ,$$

čije samo pozitivno rešenje ima fizički smisao, pa traženo vreme ravnomernog kretanja iznosi:



$$t_2 = \sqrt{t^2 - \frac{4 v_{sr} t}{a}} = 15\text{s} .$$

Iz jednačina (1) i (2) mogu se odrediti i vremena trajanja ubrzanog i usporenog kretanja, koja iznose:

$$t_1 = t_3 = 5\text{s} .$$

Uvrštavanjem ovih vremena u odgovarajuće jednačine, mogu se dobiti veličine potrebne za crtanje traženih grafika:

s_1 = 62.5 m,

v_1 = 25 m/s,

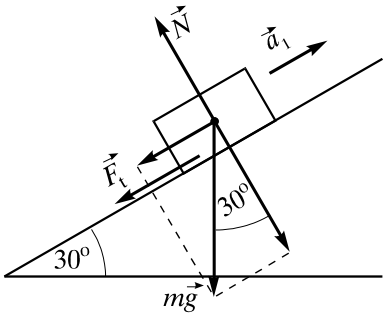
s_2 = 375 m,

$s_3 = 62.5$ m.

Zavisnosti ubrzanja, brzine i pređenog puta od vremena prikazane su graficima na slici u rešenju zadatka. Zavisnosti pređenog puta od vremena pri ubrzanom i usporenom kretanju su oblika kvadratne funkcije, pa su na grafiku prikazane kvalitativno.

9.95.RG. Pločica se udarcem pokrene uz strmu ravan nagibnog ugla 30°. Ustanovljeno je da je vreme kretanja naviše 2 puta kraće od vremena za koje pločica sklizne niz strmu ravan do početnog položaja. Odrediti koeficijent trenja između pločice i ravni.

Rešenje: Na pločicu deluju: sila Zemljine teže $m\vec{g}$, normalna reakcija podloge $\vec{N}$ i sila trenja $\vec{F}_{\mathrm{t}}$, u toku oba kretanja - naviše i naniže (vidi slike u rešenju), pa se Drugi Njutnov zakon za njeno kretanje može napisati u, formalno, istom obliku:



$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_{\mathrm{t}} + \vec{N}\,, \qquad (1)$$

za oba kretanja. Projekcija ove jednačine na pravac normalan na pravac kretanja takođe je ista u oba slučaja. Ako se ima u vidu jednačina (U125), ona se može napisati u obliku:

$$0 = -\frac{\sqrt{3}}{2} mg + N\,,$$

pa sila trenja u oba slučaja iznosi:

$$F_{\mathrm{t}} = \mu N = \frac{\sqrt{3}}{2} \mu mg\,. \qquad (2)$$

Projekcija jednačine (1) na pravac kretanja, pri kretanju pločice naviše (vidi prvu sliku u rešenju), može se napisati u obliku:

$$ma_2 = \frac{1}{2} mg - F_{\mathrm{t}}$$

Iz poslednje dve jednačine može se odrediti ubrzanje pločice pri kretanju naviše, koje iznosi:

$$a_1 = -\frac{1}{2} g(1+\mu\sqrt{3}) .$$

Ako je v_{01} početna brzina pločice, koja se zaustavi u najvišoj tački posle vremena t_1, prema jednačini (U24) može se pisati:

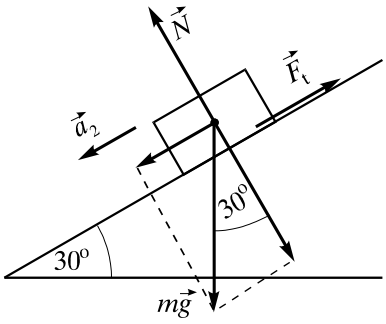
$$v = v_{01} + a_1 t_1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad v_{01} = -a_1 t_1 ,$$

pa put, koji pločica pređe do zaustavljanja, prema jednačini (U26), iznosi:

$$s = v_{01} t_1 + \frac{1}{2} a_1 t_1^2 = -\frac{1}{2} a_1 t_1^2 = \frac{1}{4} g\left(1+\mu\sqrt{3}\right) t_1^2 . \qquad (3)$$

Projekcija jednačine (1) na pravac kretanja, pri kretanju pločice naniže (vidi drugu sliku u rešenju), može se napisati u obliku:

$$ma_2 = \frac{1}{2} mg - F_t .$$



Iz poslednje jednačine i jednačine (2) može se odrediti ubrzanje pločice pri kretanju naviše, koje iznosi:

$$a_2 = \frac{1}{2} g(1-\mu\sqrt{3}) .$$

Pošto je početna brzina pločice pri spuštanju nula i vreme spuštanja pločice $t_2 = 2t_1$ (prema uslovu zadatka), pređeni put pri spuštanju iznosi:

$$s = \frac{1}{2} a_2 t_2^2 = 2a_2 t_1^2 = g\left(1-\mu\sqrt{3}\right) t_1^2 . \qquad (4)$$

Izjednačavanjem desnih strana jednačina (3) i (4), može se dobiti:

$$(1+\mu\sqrt{3}) = 4(1-\mu\sqrt{3}) ,$$

pa traženi koeficijent trenja iznosi:

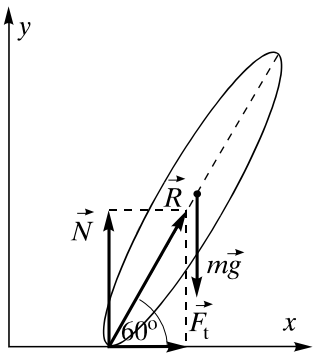
$$\mu=\frac{\sqrt{3}}{5}\approx 0.35\,.$$

10.95.RG. Vozeći drumom, motociklista ulazi u krivinu radijusa R = 200 m.

a) Odrediti maksimalnu brzinu kojom motociklista može da prođe krivinu bez proklizavanja, ako je koeficijent trenja bočnog klizanja između podloge i točkova motora μ = 0.8.

b) Kolikom će brzinom motociklista proći kroz krivinu, ako "obori" motor pod uglom od 60° prema drumu?

Rešenje: Na sistem motocikl-motociklista deluju: sila Zemljine teže mg, normalna reakcija veze $\vec{N}$ i sila trenja $\vec{F}_{\mathrm{t}}$ (vidi sliku u rešenju), pa se Drugi Njutnov zakon za njegovo kretanje može napisati u obliku:



$$m\vec{a}=m\vec{g}+\vec{N}+\vec{F}_{\mathrm{t}}\,.$$

Pošto sistem kruži u horizontalnoj ravni, poseduje centripetalno ubrzanje u smeru x - ose. Pošto motor ne pada u krivini, ubrzanje u smeru y - ose je nula. Stoga se projekcije prethodne jednačine na x i y - osu mogu napisati u obliku:

$$\frac{mv^2}{r}=F_{\mathrm{t}} \qquad (1)$$

$$0=-mg+N\,. \qquad (2)$$

Sila trenja iznosi:

$$F_{\mathrm{t}}=\mu' N=\mu' mg\,,$$

gde je μ' koeficijent statičkog trenja, koji je manji od koeficijenta trenja klizanja μ, ako ne dođe do proklizavanja motora u krivini. Njegova vrednost se menja tako da sila trenja zadovoljava jednačinu (1).

a) Motor prolazi kroz krivinu bez proklizavanja ako je centripetalna sila jednaka sili trenja. Što je brzina motora veća, veća je i centripetalna sila, odnosno sila trenja. Naime, kao što je rečeno u uvodnom delu, sila trenja može da raste do određene maksimalne vrednosti, koju postiže u trenutku proklizavanja, kada je:

$$\frac{mv_{\max}^2}{r} = \mu mg \ .$$

Odavde se može odrediti tražena maksimalna brzina, kojom motociklista može proći kroz krivinu bez proklizavanja, koja iznosi:

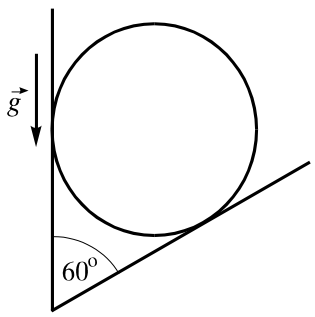
$$v_{\max} = \sqrt{\mu g R} \approx 40 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 144 \frac{\text{km}}{\text{h}} \ .$$

b) Da bi motor prošao nagnut kroz krivinu, mora rezultanta sile trenja i normalne reakcije podloge $\vec{F}_{\text{t}} + \vec{N}$ biti usmerena ka težištu sistema. Ako se iskoriste jednačine (1) i (2) i geometrijski odnosi, prema jednačinama (U125) i (U126), sledi:

$$\frac{mv^2}{r} = F_{\text{t}} = \frac{1}{2} Q \qquad \text{i} \qquad mg = N = \frac{\sqrt{3}}{2} Q \ .$$

Međusobnim deljenjem poslednjih jednačina, može se dobiti tražena brzina motocikla, koja iznosi:

$$v = \sqrt{\frac{gR}{\sqrt{3}}} \approx 33.7 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 121 \frac{\text{km}}{\text{h}} \ .$$



14.95.RP. Homogen valjak, poluprečnika *R*, postavi se u žljeb, čiji je presek dat na slici. Valjak u početnom trenutku rotira konstantnom ugaonom brzinom ω_0, oko horizontalne ose rotacione simetrije. Odrediti posle kog vremena sila trenja zaustavlja valjak, kao i broj obrtaja koje valjak načini do zaustavljanja, ako je koeficijent trenja između omotača valjka i žljeba μ. Moment inercije valjka u odnosu na osu rotacione simetrije iznosi $I = \frac{1}{2} mR^2$.

Rešenje: Na valjak deluju pored sile Zemljine teže, sile trenja i sile normalne reakcije od strana žljeba (vidi sliku u rešenju). Pošto se valjak ne kreće translatorno, Drugi Njutnov zakon za njegovo kretanje se može napisati u obliku:

$$m\vec{g} + \vec{F}_{\text{t1}} + \vec{F}_{\text{t2}} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 = 0 \ ,$$

S obzirom na uglove između sila i koordinatnih osa, projekcije ove jednačine na x i y - osu mogu se napisati u obliku (vidi jednačine (U125) i (U126)):

$$N_2 - \frac{N_1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} F_{t1} = 0 \quad \text{i}$$

$$-mg + F_{t2} - \frac{\sqrt{3}}{2} N_1 - \frac{1}{2} F_{t1} = 0 .$$

Ako se u poslednje dve jednačine uvrste sile trenja, koje iznose $F_{t1} = \mu N_1$ i $F_{t1} = \mu N_1$, mogu se lako dobiti normalne reakcije i odgovarajuće sile trenja, koje iznose:

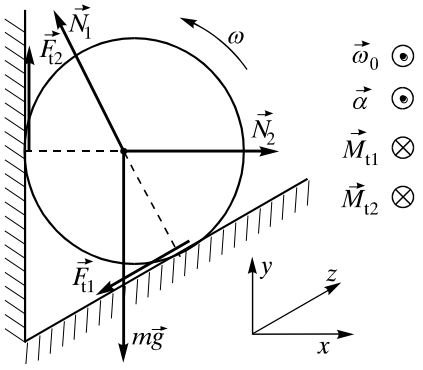
$$N_1 = \frac{2\sqrt{3}mg}{3(1+\mu^2)}, \qquad F_{t1} = \mu N_1 = \frac{2\sqrt{3}\mu mg}{3\left(1+\mu^2\right)},$$

$$N_2 = \frac{\sqrt{3}mg\left(1+\sqrt{3}\mu\right)}{3\left(1+\mu^2\right)}, \qquad F_{t2} = \mu N_2 = \frac{\sqrt{3}\mu mg\left(1+\sqrt{3}\mu\right)}{3\left(1+\mu^2\right)}.$$

.

Na rotaciju valjka utiču momenti sila trenja, kojima žljeb deluje na valjak, pa se Osnovni zakon dinamike rotacije za njegovo kretanje može napisati u obliku:

$$\vec{M}_{t1} + \vec{M}_{t2} = I\vec{\alpha} .$$



Na slici u rešenju su označeni pretpostavljeni smerovi početne ugaone brzine i ugaonog ubrzanja, i odgovarajući smerovi momenata sile trenja. Projekcija poslednje jednačine na z - osu ima oblik:

$$M_{t1} + M_{t2} = RF_{t1} + RF_{t2} = -I\alpha = -\frac{1}{2} mR^2\alpha$$

.

Posle uvrštavanja izraza za sile trenja u poslednju jednačinu, može se lako odrediti ugaono ubrzanje valjka, koje iznosi:

$$\alpha = -\frac{g}{R}\frac{2\mu(\mu+\sqrt{3})}{1+\mu^2}.$$

Pošto valjak rotira ravnomerno usporeno (zbog znaka minus), do zaustavljanja (= 0), traženo vreme rotacije valjka, prema jednačini (U52), iznosi:

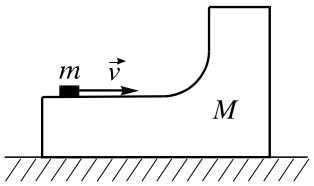
$$t = \frac{\omega_0}{\alpha} = \frac{R\omega_0}{g}\frac{1+\mu^2}{2\mu\left(\sqrt{3}+\mu\right)}.$$

Prema jednačini (U54), ugao rotacije valjka do zaustavljanja iznosi:

$$\theta = -\frac{\omega_0^2}{\alpha} = \frac{R\omega_0^2}{4\pi g}\frac{1+\mu^2}{\mu\left(\sqrt{3}+\mu\right)},$$

pa traženi broj obrtaja valjka do zaustavljanja, iznosi:

$$N = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{R\omega_0^2(1+\mu^2)}{8\mu\pi g(\sqrt{3}+\mu)}.$$

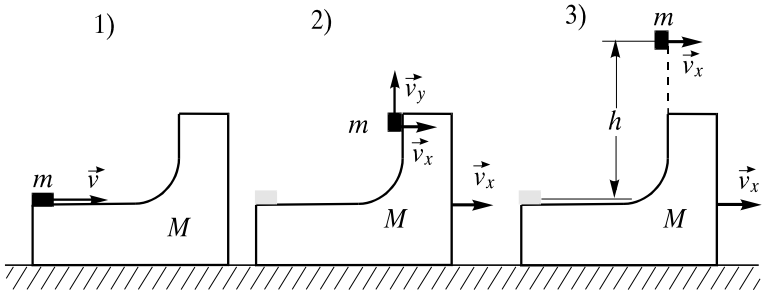


16.95.S. Na glatkoj horizontalnoj podlozi nalazi se telo mase *M*, a na njemu se nalazi mala pločica mase *m* (vidi sliku). Pločici se saopšti u horizontalnom pravcu brzina *v*. Na koju će se visinu, u odnosu na početni položaj, popeti pločica posle odvajanja od tela *M*? Sva trenja zanemariti.

Rešenje: Neposredno pre odvajanja od tela *M* horizontalna komponenta brzine pločice v_x i brzina tela su jednake, pošto su tela priljubljena jedno uz drugo (vidi slike u rešenju). Na sistem telo-pločica ne deluju spoljašnje sile u pravcu *x* - ose (trenje između većeg tela i podloge zanemarljivo), pa komponente njihovih brzina u pravcu *x* - ose ostaju konstantne i jednake v_x. Kada pločica stigne u najvišu tačku, *y* - komponenta njene brzine postaje nula, pa je ukupna brzina pločice jednaka v_x.

Pošto na sistem ne deluju spoljašnje sile u pravcu *x* - ose važi Zakon održanja impulsa, za kretanje sistema u ovom pravcu. Primenjen na početno (1) i krajnje (3) stanje sistema (vidi sliku u rešenju), ovaj Zakon se može napisati u obliku:

$$mv = (m+M)v_x.$$



Pošto na sistem deluju samo konzervativne sile, važi Zakon održanja energije, koji se, primenjen na početno (1) i krajnje (3) stanje, može pisati u obliku:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_x^2}{2} + mgh + \frac{Mv_x^2}{2}\,.$$

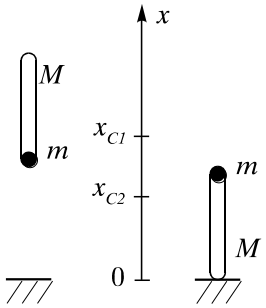
Eliminacijom krajnje brzine tela v_x iz ovih jednačina, lako se može odrediti tražena visina, u odnosu na početni položaj, do koje će se pločica podići:

$$h = \frac{Mv^2}{2g(M+m)}\,.$$

18.95.S. U zatvorenoj, homogenoj po dužini, epruveti, mase M i dužine l, koja se nalazi na visini l iznad stola, nalazi se muva mase m. U trenutku kad se epruveta pusti muva poleti sa dna epruvete ka vrhu. Ako muva stigne do vrha epruvete u trenutku kad epruveta dodirne sto, koliko se vremena kretala epruveta do udara o sto?

Rešenje: Usmerimo x - osu vertikalno uvis, sa koordinatnim početkom na površini stola (vidi sliku u rešenju). Pošto je epruveta homogena po dužini, centar mase joj se nalazi na sredini, pa se koordinate centra mase sistema epruveta-muva na početku i na kraju posmatranog kretanja mogu napisati u obliku:

$$x_{c1} = \frac{mh + \frac{3}{2}Ml}{m+M}\,, \qquad x_{c2} = \frac{ml + M\frac{l}{2}}{m+M}\,.$$

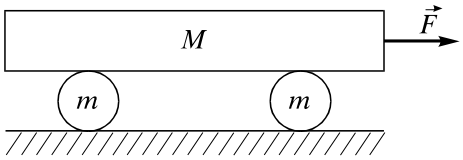


Pošto, prema postavci zadatka, muva leti, znači da se u njoj nalazi vazduh. Preko njega se, zahvaljujući silama otpora sredine, prenosi interakcija između muve i epurvete. Drugim rečima, epurveta i muva čine sistem koji kao celina slobodno pada. Put koji pređe centar mase sistema u toku padanja jednak je:

$$s = x_{c1} - x_{c2} = \frac{M}{m+M} l \,.$$

Prema jednačini (U26), traženo vreme kretanja epruvete, do udara u sto, iznosi:

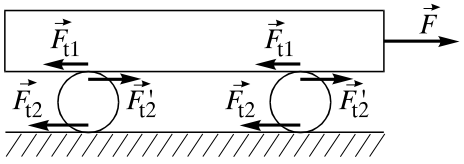
$$t = \sqrt{\frac{2s}{g}} = \sqrt{\frac{2Ml}{(m+M)g}} \,.$$



19.95.S. Daska mase M položena je na dva jednaka cilindra poluprečnika R i masa m (vidi sliku). U početnom trenutku sistem miruje. Na dasku počinje da deluje u horizontalnom pravcu sila F. Naći ubrzanje daske i veličine sila trenja koje deluju između daske i cilindra i između cilindra i podloge. Rad sile trenja kotrljanja bez klizanja je nula. Moment inercije cilindra oko ose rotacione simetrije je mR^2.

Rešenje: Pošto nema proklizavanja daske, brzina daske v je jednaka brzini tačke cilindra koja dodiruje dasku. U svakom trenutku se može smatrati da cilindar rotira oko trenutne ose rotacije, tačke u kojoj cilindar dodiruje podlogu. Ugaona brzina rotacije oko ove tačke ista je za centar mase cilindra i tačku cilindra u kojoj on dodiruje dasku, pa je:

$$\frac{v}{2R} = \frac{v_{cm}}{R} \,,$$



gde je v_{cm} brzina centra mase u odnosu na podlogu, koja iznosi:

$$v_{cm} = \frac{v}{2} \,.$$

Na putu s sila F vrši rad nad sistemom cilindri-daska. Pošto je rad sila trenja kotrljanja bez klizanja nula i pošto se potencijalna energija sistema ne menja, rad ove

sile je, prema jednačini (U95), jednak promeni kinetičke energije sistema. Pošto je sistem u početnom trenutku mirovao, ovaj rad je jednak kinetičkoj energiji sistema nakon pređenog puta s, odnosno:

$$Fs = \frac{Mv^2}{2} + 2\left(\frac{I\omega^2}{2} + \frac{mv_{\mathrm{cm}}^2}{2}\right) = \frac{Mv^2}{2} + 2\left(\frac{mR^2\left(\frac{v_{\mathrm{cm}}}{R}\right)^2}{2} + \frac{mv_{\mathrm{cm}}^2}{2}\right) =$$

$$= \frac{Mv^2}{2} + 2mv_{\mathrm{cm}}^2 = \frac{Mv^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = \frac{(M+m)v^2}{2}.$$

Pošto na nju deluju konstantne sile, daska se kreće ravnomerno ubrzano. Ako iz poslednje jednačine izrazimo eksplicitno kvadrat brzine daske

$$v^2 = 2\frac{F}{M+m}s,$$

i uporedimo sa odgovarajućim izrazom za ravnomerno ubrazano kretanje, bez početne brzine ($v^2 = 2as$), može se dobiti ubrzanje daske, koje iznosi:

$$a = \frac{F}{M+m}.$$

Dasku ubrzava sila $\vec{F}$, a usporavaju dve sile trenja $\vec{F}_{\mathrm{t1}}$, pa se Drugi Njutnov zakon za kretanje daske može pisati u obliku:

$$Ma = F - 2F_{\mathrm{t1}}.$$

Zamenom ubrzanja u ovu jednačinu može se odrediti tražena sila trenja između daske i cilindara, koja iznosi:

$$F_{\mathrm{t1}} = \frac{m}{2(M+m)}F.$$

Na svaki valjak deluju sila trenja $\vec{F}_{\mathrm{t1}}$ u smeru kretanja i $\vec{F}_{\mathrm{t1}}$ u suprotnom smeru. Pošto je po Zakonu akcije i reakcije $F'_{\mathrm{t1}} = F_{\mathrm{t1}}$, Drugi Njutnov zakon, za kretanje centra mase valjka, može se napisati u obliku:

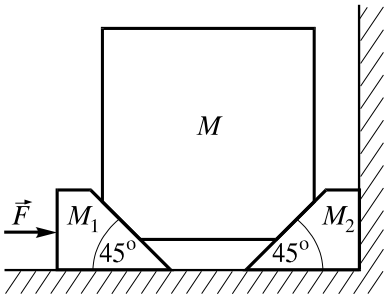
$$ma_{\mathrm{cm}} = F_{\mathrm{t1}} - F_{\mathrm{t2}}$$

Isti odnos postoji između ubrzanja centra mase cilindara i ubrzanja daske, kao između njihovih brzina, odnosno, $a_{\mathrm{cm}} = a/2$, pa se gornja jednačina, posle uvrštavanja ubrzanja daske, može napisati u obliku:

$$ma_{\mathrm{cm}} = \frac{ma}{2} = \frac{m}{2}\frac{F}{M+m} = F_{\mathrm{t1}} - F_{\mathrm{t2}} = \frac{mF}{2(M+m)} - F_{\mathrm{t2}}\,.$$

Odavde je očigledno da je tražena sila trenja između cilindra i podloge nula, odnosno:

$$F_{\mathrm{t2}} = 0\,.$$



20.95.S. Dat je sistem, prikazan na slici. Mase strmih ravni su $M_1 = M_2 = M$, a nagibni uglovi po 45°. Sve površine su apsolutno glatke. Telo, čija je masa M, treba podići uz pomoć strmih ravni tako što se na strmu ravan M_1 deluje horizontalnom silom F. Odrediti:
a) intenzitet i pravac ubrzanja strme ravni M_1,
b) intenzitet i pravac ubrzanja tela M,
c) silu kojom nepokretna strma ravan M_2 deluje na telo M.

Rešenje: Drugi Njutnov zakon za kretanje svih posmatranih tela može se napisati u vektorskom obliku:

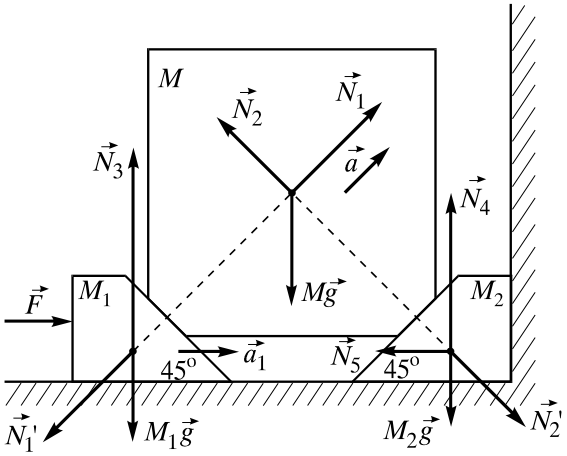
$$M_1\vec{a}_1 = \vec{F} + \vec{N}_1' + \vec{N}_3 + M_1\vec{g}\,, \tag{1}$$

$$M\vec{a} = \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + M\vec{g}\,, \tag{2}$$

$$M_2\vec{a}_2 = M_2\vec{g} + \vec{N}_2' + \vec{N}_4 + \vec{N}_5 = 0\,, \tag{3}$$

gde su $\vec{N}_1$ i $\vec{N}_1'$ sile međusobnog delovanja između tela masa M_1 i M, a $\vec{N}_2$ i $\vec{N}_2'$ sile međusobnog delovanja između tela masa M_2 i M (vidi prvu sliku u rešenju). Sile $\vec{N}_3$, $\vec{N}_4$ i $\vec{N}_5$ predstavljaju sile normalnih reakcija podloge i zida na odgovarajuća tela.

Pošto se telo M_1 kreće paralelno podlozi, projekcija jednačine (1) na pravac kretanja, s obzirom na jednačinu (U124), ima oblik:



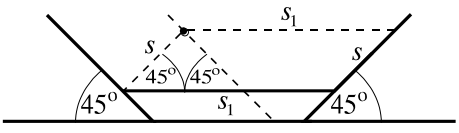
$$M_1 a_1 = F - \frac{\sqrt{2}}{2} N_1 . \qquad (4)$$

Telo M se pomera translatorno u pravcu kosine strme ravni mase M_2, pa mu je i ubrzanje usmereno u tom pravcu (vidi prvu sliku u rešenju). Projekcija jednačine (2) na ovaj pravac može da se napiše u obliku:

$$Ma = N_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} Mg . \qquad (5)$$

Odnos ubrzanja strme ravni a_1 i ubrazanja tela a, jednak je odnosu pređenog puta s_1, strme ravni mase M_1, i pređenog puta s, tela M. Prema drugoj slici u rešenju, s obzirom na jednačinu (U124), može se pisati:

$$a = \frac{\sqrt{2}}{2} a_1 . \qquad (6)$$



Pošto je po Zakonu akcije i reakcije $\vec{N}_1' = -\vec{N}_1$, odnosno, $N_1' = N_1$, eliminacijom N_1 i N_1' iz jednačina (4) i (5), može se dobiti:

$$M_1 a + \frac{\sqrt{2}}{2} Ma = F - \frac{1}{2} Mg . \qquad (7)$$

Iz sistema jednačina (6) i (7) mogu se odrediti dve tražene veličine,
a) ubrzanje strme ravni M_1

$$a_1 = \frac{2F - Mg}{2M_1 + M} \qquad \text{i}$$

b) ubrzanje tela M

$$a = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{2F - Mg}{2M_1 + M} .$$

c) Telo mase M se ne kreće u pravcu normalnom na kosinu strme ravni mase M_1, pa se projekcija jednačine (2) na ovaj pravac može pisati u obliku:

$$0 = N_2 - \frac{\sqrt{2}}{2} Mg .$$

Prema tome, traženi intenzitet sile kojom strma ravan mase M_2 deluje na telo mase M iznosi:

$$N_2' = \frac{\sqrt{2}}{2} Mg .$$

Napomena: Jednačina (3), koja se odnosi na strmu ravan M_2 nije potrebna za određivanje traženih veličina, ali je data radi kompletnosti i mogućnosti rešavanja drugih varijanti zadatka.